

Symbole i oznaczenia

Symbole Σ i Π

Skrócony zapis wielokrotnego sumowania np. $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Przykład

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$$

Przykład

$$\sum_{k=1}^3 k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

Przykład

$$\sum_{j=-2}^1 \frac{1}{2j-1} = \frac{1}{-5} + \frac{1}{-3} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} = -\frac{8}{15}$$

Własności

$$1) \quad \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$3) \quad \sum_{i=1}^n c = nc$$

$$4) \quad \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i$$

Uwaga

na ogół

$$\sum_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i$$

Niekiedy stosuje się sumę podwójną $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$

$$\text{np. } \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = \sum_{i=1}^2 (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23}$$

Skrócony zapis wielokrotnego mnożenia np. $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$

Przykład

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

Zadanie

Zapisz sumy za pomocą symbolu Σ

$$a) \quad 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 12 =$$

$$b) \quad 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 15 =$$

$$c) \quad 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 256 =$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 8^2 =$

Zadanie

Oblicz

a) $\sum_{i=1}^4 t$ odp. 4t

b) $\sum_{t=1}^4 t$ odp. 10

c) $\sum_{k=1}^6 2^{k-1}$ odp. 63

d) $\sum_{i=-1}^5 (2i-1)$ odp. 21

Silnia.

Symbol $n!$ (czytamy n silnia) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n.

Zatem $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $n! = \prod_{i=1}^n i$

Przyjmujemy, że $0! = 1$.

Przykład

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Zadanie

Oblicz

$\sum_{i=1}^5 (i-1)!$ odp. 34

Symbol Newtona.

Symbol $\binom{n}{k}$ (czytamy „n po k” lub „n nad k”)

gdzie n, k to liczby całkowite nieujemne, $k \leq n$

oznacza liczbę określoną wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Przykład

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

Rachunek zdań

Przez **zdanie** rozumiemy w logice wypowiedź oznajmującą i taką, której w ramach danej nauki można przypisać ocenę **prawdziwości** lub **falszu** (tzn. tylko jedną z tych dwóch ocen).

Zapisujemy $w(p) = 1$ gdy p jest zdaniem prawdziwym

Zapisujemy $w(p) = 0$ gdy p jest zdaniem fałszywym

Literę oznaczającą dowolne zdanie nazywamy **zmienną zdaniową**.

Jeżeli p oznacza zdanie prawdziwe, to piszemy: $p = 1$,

jeżeli p oznacza zdanie fałszywe, to piszemy: $p = 0$.

Spójniki logiczne. Za pomocą **spójników logicznych** ze zmiennych zdaniowych tworzymy **formuły rachunku zdań**. Formuły te przyjmują wartości logiczne 0 lub 1, więc mogą być uważane za zmienne zdaniowe.

Nazwa spójnika	Symbol spójnika	Budowa formuły	Nazwa formuły	Sposób odczytania
nie	$\sim$	$\sim p$	negacja, zaprzeczenie	„nie p ”, „nieprawda, że p ”
i	$\wedge$	$p \wedge q$	koniunkcja	„ p i q ”
lub	$\vee$	$p \vee q$	alternatywa	„ p lub q ”
implikuje	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	implikacja	„jeżeli p to q ”, „ p implikuje q ”, „z p wynika q ”
jest równo ważne	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	równoważność	„ p jest równoważne q ”

Tabele zerojedynkowe.

Tabela negacji

p	$\sim p$
1	0
0	1

Tabela koniunkcji

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela alternatywy

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1

0	0	0
---	---	---

Tabela implikacji

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabela równoważności

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Przykład

Wyznaczyć wartość logiczną zdania

$$(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$$

gdy $p = 0$, $q = 1$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} w[(0 \wedge \sim 1) \Leftrightarrow (0 \vee \sim 1)] &= w[(0 \wedge 0) \Leftrightarrow (0 \vee 0)] = \\ &= w[0 \Leftrightarrow 0] = 1 \end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczyć wartość logiczną formuły

$$(p \wedge q) \vee (\sim r \Rightarrow q)$$

gdy $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$.

Rozwiązanie

$$w[(0 \wedge 1) \vee (\sim 1 \Rightarrow 1)] = w[0 \vee (0 \Rightarrow 1)] = w[0 \vee 1] = 1.$$

Tautologie

Tautologia jest to formuła rachunku zdań, która przyjmuje wartość logiczną 1 przy dowolnym podstawieniu wartości logicznych za zmienne zdaniowe występujące w tej formule.

Przykład

Wykazać, że formuła

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

jest tautologią.

Rozwiązanie.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	F
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1

0	0	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

Prawa de Morgana

Wykazać, że formuła

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

jest tautologią.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	F
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Formułę możemy odczytać następująco: „**Zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeczeń**”. Jest to **pierwsze prawo de Morgana**.

Wykazać, że formuła

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

jest tautologią.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	F
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Formułę możemy odczytać następująco: „**Zaprzeczenie alternatywy jest równoważne koniunkcji zaprzeczeń**”. Jest to **drugie prawo de Morgana**.

Inne tautologie

1. $p \vee \sim p$ prawo wyłączonego środka (tertium non datur)
2. $\sim(p \wedge \sim p)$ prawo niesprzeczności
3. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ idempotentność koniunkcji
4. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ idempotentność alternatywy
5. $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia
6. $p \Rightarrow p$
7. $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$ pierwsze prawo Claviusa
8. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ drugie prawo Claviusa
9. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ przemienność koniunkcji
10. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ przemienność alternatywy
11. $(p \wedge q) \Rightarrow p$
12. $p \Rightarrow (p \vee q)$
13. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$
14. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ kontrapozycja
15. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$ prawo Pierce’a
16. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ prawo Dunska-Scotusa
17. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ prawo sygnifikacji

18. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
19. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
20. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
21. $[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p$
22. $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$ łączność koniunkcji
23. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, rozdzielnosc koniunkcji wzgledem alternatywy
24. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$, rozdzielnosc alternatywy wzgledem koniunkcji
25. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ przechodnosc implikacji
26. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ importacja
27. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ eksportacja
28. $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$, prawo laczzenia poprzednikow w alternatywe
29. $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$, prawo laczzenia nastepnikow w koniunkcje
30. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$
31. $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
32. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

Zadania

Zadanie 1

Jaka jest wartosc logiczna zdania.

- a) Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od 2.
- b) Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od kazdej liczby naturalnej.
- c) Liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od pewnej liczby naturalnej.
- d) Liczba $\sqrt{3}$ jest wieksza od pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 2

Ocenić wartosc logiczna zdania

- a) $(2 < 3) \wedge (2 > 3)$
- b) $(2 < 3) \vee (2 > 3)$
- c) $(2 < 3) \Rightarrow (2 > 3)$
- d) $(2 > 3) \Rightarrow (2 < 3)$
- e) $(2 < 3) \Leftrightarrow (2 > 3)$
- f) $(2 = 3) \wedge (2 > 3)$

Zdania b), d), są prawdziwe.

Zdania a), c), e), f), są fałszywe.

Zadanie 3

Wyznaczyć wartosc logiczna podanej formuly przy podstawieniu $p=1$, $q=0$.

- a) $\sim p \vee q$
- b) $p \wedge \sim q$
- c) $\sim p \Rightarrow \sim q$
- d) $\sim (p \Leftrightarrow q)$

Formuły b), c), d), mają wartosc logiczna 1.

Formuła a), ma wartosc logiczna 0.

Zbiory

Zbiór jest w matematyce pojęciem pierwotnym. Obiekty, które należą do pewnego zbioru nazywamy *elementami* tego zbioru. Pojęcie elementu zbioru też jest pojęciem pierwotnym.

Zapisujemy:

$$a \in A$$

„a jest elementem zbioru A”.

$$a \notin A$$

„element a nie należy do zbioru A”

Sposoby określania zbiorów.

- 1) Przez wypisanie elementów.
- 2) Przez podanie warunku, jaki spełniają elementy tego zbioru.

Dwa zbiory są równe, gdy mają te same elementy.

Przykład

- a) $\{a, b, c, d\} = \{c, b, d, a\}.$
- b) $\{a, b\} = \{a, a, b, b, b\}.$

Zbiór, do którego nie należy żaden element nazywamy **zbiorem pustym**. Istnieje tylko jeden taki zbiór. Oznaczamy go symbolem $\emptyset$.

Zbiory liczbowe. Zbiory, których elementami są liczby nazywamy zbiorami liczbowymi.

Zbiór liczb naturalnych - N .

Zbiór liczb całkowitych - Z .

Zbiór liczb wymiernych - Q .

Zbiór liczb rzeczywistych - R .

Przedział otwarty $(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}$

Przedział domknięty $[a; b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

Przedział lewostronnie domknięty $[a; b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

Przedział prawostronnie domknięty $(a; b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$

Przedziały nieograniczone:

$$(a; \infty) = \{x \in R : a < x\}$$

$$[a; \infty) = \{x \in R : a \leq x\}$$

$$(-\infty; a) = \{x \in R : x < a\}$$

$$(-\infty; a] = \{x \in R : x \leq a\}$$

Mówimy, że zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , gdy każdy element zbioru A jest także elementem zbioru B . Piszemy: $A \subset B$.

Przykład

a) $N \subset Z, N \subset Q, N \subset R, Z \subset Q, Z \subset R, Q \subset R.$

b) $(a; b) \subset [a; b], [a; b) \subset [a; b]$

c) $\emptyset \subset A$ dla dowolnego A .

Związek między zawieraniem się zbiorów i równością zbiorów:

$$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$$

Część wspólna czyli **iloczynem** zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B .

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Zbiory, których część wspólna jest zbiorem pustym nazywamy **zbiorami rozłącznymi**.

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B .

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące równości wyrażające własności działań na zbiorach.

a) $A \cap B = B \cap A$ przemienność iloczynu zbiorów

- b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ łączność iloczynu zbiorów
 c) $A \cup B = B \cup A$ przemienność sumy zbiorów
 d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ łączność sumy zbiorów
 e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ rozdzielność iloczynu zbiorów względem sumy zbiorów
 f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ rozdzielność sumy zbiorów względem iloczynu zbiorów
 Następujące twierdzenia wyrażają związki działań na zbiorach z zawieraniem się zbiorów:
 a) Jeżeli $A \subset B$, to $A \cap B = A$
 b) Jeżeli $A \subset B$, to $A \cup B = B$
 c) Jeżeli $A \subset B$, to $A \setminus B = \emptyset$

Przykład

- a) Jeżeli $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, to $A \cap B = \{b, c\}$.
 b) Jeżeli $A = \{-3, 2, 0, 5, \pi\}$, to $A \cap N = \{2, 5\}$.
 c) Jeżeli $A = \{-3, 2, 0, 5, \pi\}$, to $A \cap Z = \{-3, 2, 0, 5\}$.
 d) $(1; 5) \cap < 2; 7) = < 2; 5)$
 e) $(1; 5) \cap N = \{2, 3, 4\}$
 f) $(1; 5) \cap (7; 9) = \emptyset$
 g) $\emptyset \cap A = \emptyset$ dla dowolnego zbioru A .

Przykład

- a) Jeżeli $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, to $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.
 b) $(1; 5) \cup < 2; 7) = (1; 7)$
 c) $\{2\} \cup (2; 4) = < 2; 4)$
 d) $\{2, 4\} \cup (2; 4) = < 2; 4 >$
 e) $(-\infty; 0) \cup < 0; \infty) = R$
 f) $\emptyset \cup A = A$ dla dowolnego zbioru A .

Przykład

- a) Jeżeli $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, to $A \setminus B = \{a, d\}$.
 b) $(1; 5) \setminus < 2; 7) = (1; 2)$
 c) $< 2; 7) \setminus (1; 5) = < 5; 7)$
 d) $< 2; 7) \setminus \{2\} = (2; 7)$
 e) $(2; 4) \setminus (7; 8) = (2; 4)$
 f) $(2; 4) \setminus (1; 8) = \emptyset$
 g) $A \setminus \emptyset = A$ dla dowolnego zbioru A .
 h) $\emptyset \setminus A = \emptyset$ dla dowolnego zbioru A .

Dopełnienie zbioru. Jeżeli rozważamy zbiory będące podzbiorami jednego, ustalonego zbioru X , to zbiór X nazywamy *przestrzenią*. Jeżeli zbiór X jest dla zbioru A przestrzenią, to zbiór $X \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem zbioru A* (do przestrzeni X) i oznaczamy symbolem A' .

Iloczyn kartezjański zbiorów. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór par uporządkowanych (a, b) , w których pierwszy wyraz $a \in A$, zaś drugi wyraz $b \in B$. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \times B$. Zatem:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Przykład

Dane są zbiory $A = \{a, b\}$ oraz $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są następujące równości.

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ rozdzielnosc iloczynu kartezjańskiego względem części wspólnej zbiorów

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ rozdzielnosc iloczynu kartezjańskiego względem sumy zbiorów

Oznaczenia.

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ oznacza **zbiór** o elementach $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Kolejność wypisania elementów zbioru nie odgrywa roli.

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ oznacza **ciąg** o wyrazach $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Kolejność ustawienia wyrazów w ciągu jest bardzo ważna. Zmieniając kolejność wyrazów w ciągu otrzymujemy inny ciąg.

Zadanie

Zadanie 1

Z ilu elementów składa się zbiór

a) $\{x : x \in \mathbb{N} \wedge x < 7\}$ b) $\{x : x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 7\}$

c) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x < 7\}$ d) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 < 7\}$

e) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 7\}$ f) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 9\}$

g) $\emptyset$ h) $\{\emptyset\}$

i) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ j) $\{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$

odp.

a) 6, b) 2, c) nieskończenie wiele, d) 5, e) 0,

f) 2, g) 0, h) 1, i) 2, j) 1

Zadanie 2

Dane są zbiory: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g, h, i, j\}$,

$C = \{b, c, d, e, f\}$, $D = \{i, j, k\}$. Wyznaczyć zbiory:

a) $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

b) $A \cap C$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$

c) $A \cap D$, $A \cup D$, $A \setminus D$, $D \setminus A$

odp.

a) $A \cap B = \{d, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A \setminus B = \{a, b, c\}$, $B \setminus A = \{f, g, h, i, j\}$

b) $A \cap C = \{b, c, d, e\}$, $A \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A \setminus C = \{a\}$, $C \setminus A = \{f\}$

c) $A \cap D = \emptyset$, $A \cup D = \{a, b, c, d, e, i, j, k\}$, $A \setminus D = A$, $D \setminus A = D$

Zadanie 3

Dane są przedziały: $A = \langle 2; 5 \rangle$, $B = (1; 4)$, $C = (3; 7 \rangle$,

$D = \langle 1; 2 \rangle$. Wyznaczyć zbiory:

a) $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

b) $A \cap C$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$

c) $A \cap D, A \cup D, A \setminus D, D \setminus A$

odp.

a) $A \cap B = \langle 2; 4 \rangle, A \cup B = (1; 5 \rangle, A \setminus B = \langle 4; 5 \rangle, B \setminus A = (1; 2)$

b) $A \cap C = (3; 5 \rangle, A \cup C = \langle 2; 7 \rangle, A \setminus C = \langle 2; 3 \rangle, C \setminus A = (5; 7 \rangle$

c) $A \cap D = \emptyset, A \cup D = \langle 1; 5 \rangle, A \setminus D = A, D \setminus A = D$

Zadanie 4

Wyznacz zbiory

a) $N \cap \langle 3; 6 \rangle$

b) $N \cap \langle -3; 2 \rangle$

c) $Z \cap \langle -3; 2 \rangle$

d) $N \setminus (0; 12)$

e) $\langle 2; 4 \rangle \setminus N$

f) $(3; 4) \setminus N$

odp.

a) $\{3, 4, 5\}$ b) $\{1\}$ c) $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

d) $\{12, 13, 14, \dots\}$ e) $(2; 3) \cup (3; 4)$ f) $(3; 4)$

Zadanie 5

Wyznacz zbiór

a) $A \cup (A \cap B)$

b) $B \cap (A \cup B)$

c) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

Zadanie 6

Dane są zbiory $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$. Wyznaczyć zbiory

a) $A \times B$

b) $B \times A$

c) $A \times A$

d) $B \times B$

odp.

a) $\{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$

b) $\{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b)\}$

c) $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

d) $\{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c)\}$

Zadanie 7

W układzie współrzędnych Oxy zaznaczyć zbiór A na osi Ox , zbiór B na osi Oy , a następnie na płaszczyźnie Oxy wyznaczyć zbiór $A \times B$.

a) $A = \langle 1; 3 \rangle, B = \langle 2; 4 \rangle$ b) $A = (1; 3), B = (2; 4)$

c) $A = \langle 1; 3 \rangle, B = (2; 4)$ d) $A = \{2\}, B = \langle 2; 4 \rangle$

e) $A = \langle 1; 3 \rangle, B = \{2; 4\}$ f) $A = \{1; 3\}, B = \{2; 4\}$

g) $A = \{2\}, B = (1; \infty)$ h) $A = \{2\}, B = R$

odp.

a) Kwadrat o wierzchołkach $(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)$ wraz z brzegiem.

b) Kwadrat o wierzchołkach $(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)$ bez brzegu.

c) Kwadrat o wierzchołkach $(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)$; boki równoległe do osi Ox nie należą do zbioru, a boki równoległe do osi Oy należą do zbioru. Wierzchołki nie należą do zbioru.

d) Odcinek o końcach $(2, 2)$ i $(2, 4)$.

e) Dwa odcinki: jeden o końcach $(1, 2)$ i $(3, 2)$, drugi o końcach $(1, 4)$ i $(3, 4)$.

f) Cztery punkty: $(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)$

g) Półprosta o początku $(2, 1)$ przechodząca przez punkt $(2, 2)$.

h) Prosta o równaniu $x = 2$.

Kwantyfikatory

Kwantyfikator ogólny.

Symbol $\bigwedge$ oznacza: „dla każdego”.

Niekiedy zamiast symbolu $\bigwedge$ jest używany symbol $\forall$.

Przykład

a) Zapis: $\bigwedge_{x \in R} x^2 \geq 0$ odczytujemy: „dla każdej liczby rzeczywistej x jest $x^2 \geq 0$ ”.

Jest to zdanie prawdziwe.

b) Zapis: $\bigwedge_{x \in R} x^2 > 0$ odczytujemy: „dla każdej liczby rzeczywistej x jest $x^2 > 0$ ”.

Jest to zdanie fałszywe, gdyż np. $x = 0$ nie spełnia funkcji zdaniowej $x^2 > 0$.

Kwantyfikator szczegółowy.

Symbol $\bigvee$ oznacza: „istnieje”.

Niekiedy zamiast symbolu $\bigvee$ jest używany symbol $\exists$.

Przykład

a) Zapis: $\bigvee_{x \in R} x^2 \leq 0$ odczytujemy: „istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x^2 \leq 0$ ”.

Jest to zdanie prawdziwe, gdyż np. $x = 0$ spełnia funkcję zdaniową $x^2 \leq 0$.

b) Zapis: $\bigvee_{x \in R} x^2 < 0$ odczytujemy: „istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x^2 < 0$ ”.

Jest to zdanie fałszywe, gdyż żadna liczba rzeczywista x nie spełnia funkcji zdaniowej $x^2 < 0$.

Prawa zaprzeczania. Prawa de Morgana dla rachunku kwantyfikatorów:

$$a) \sim \bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim \Phi(x)$$

$$b) \sim \bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim \Phi(x)$$

Przykład

$$\sim \bigwedge_{x \in R} x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \bigvee_{x \in R} x^2 < 0$$

Przykład

$$\sim \bigvee_{x \in R} x^2 = -1 \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in R} x^2 \neq -1$$

Prawa de Morgana łatwo zapamiętać: *aby zaprzeczyć zdaniu z kwantyfikatorami należy „odwrócić” kwantyfikatory i utworzyć zaprzeczenie funkcji zdaniowej objętej tymi kwantyfikatorami.*

Zadanie

Oceń wartość logiczną zdania

$$a) \bigwedge_{x \in R} |x| > 0$$

$$b) \bigvee_{x \in R} |x| \leq 0$$

c) $\bigwedge_{x \in N} 2x+1$ jest liczbą nieparzystą

d) $\bigwedge_{x \in N} 3x+1$ jest liczbą nieparzystą

e) $\bigwedge_{x \in Z} \frac{x}{2} \notin Z$

f) $\bigvee_{x \in Z} \frac{x}{2} \notin Z$

g) $\bigvee_{x \in Z} \frac{x}{2} \in Z$

h) $\bigwedge_{x \in N} x^2 > x$

i) $\bigwedge_{x \in N} 2x > x$

j) $\bigwedge_{x \in Z} 2x > x$

k) $\bigwedge_{x \in Z} x^2 \geq x$

l) $\bigwedge_{x \in R} x^2 \geq x$

m) $\bigvee_{x \in N} \pi \cdot x \in N$

n) $\bigvee_{x \in R} x = 100x$

odp.

a) 0 b) 1 c) 1 d) 0 e) 0 f) 1 g) 1 h) 0

i) 1 j) 0 k) 1 l) 0 m) 0 n) 1

ZBIORY LICZB

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb **naturalnych**

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – zbiór liczb **całkowitych**

$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\}$ – zbiór liczb **wymiernych**

R – zbiór liczb rzeczywistych

Zbiór $A \subset R$ jest **ograniczony z dołu**, jeżeli

$$\bigvee_{m \in R} \bigwedge_{x \in A} x \geq m$$

Tzn. wszystkie jego elementy leżą na prawo od pewnego punktu osi liczbowej.

Liczbę m nazywamy ograniczeniem z dołu zbioru A .

Zbiór $A \subset R$ jest **ograniczony z góry**, jeżeli

$$\bigvee_{M \in R} \bigwedge_{x \in A} x \leq M$$

Tzn. wszystkie jego elementy leżą na lewo od pewnego punktu osi liczbowej.

Liczbę M nazywamy ograniczeniem z góry zbioru A .

Zbiór $A \subset R$ jest **ograniczony** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony z dołu i z góry.

Liczba a jest **najmniejszym elementem** zbioru $A \subset R$, co zapisujemy $a = \min A$,

wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$ oraz $\bigwedge_{x \in A} x \geq a$.

Liczba a jest **największym elementem** zbioru $A \subset R$, co zapisujemy $a = \max A$,

wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$ oraz $\bigwedge_{x \in A} x \leq a$.

Kres dolny zbioru

Niech zbiór $A \subset R$ będzie niepusty i ograniczony z dołu. Liczba a jest **kresem dolnym** tego zbioru, co zapisujemy $a = \inf A$,

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in A} x \geq a \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x_0 \in A} x_0 < a + \varepsilon$$

zatem, kres dolny zbioru jest największą liczbą ograniczającą ten zbiór z dołu. Jeżeli zbiór A jest nieograniczony z dołu, to przyjmujemy

$$\inf A \stackrel{\text{def}}{=} -\infty.$$

Kres górny zbioru

Niech zbiór $B \subset R$ będzie niepusty i ograniczony z góry. Liczba b jest kresem górnym tego zbioru, co zapisujemy $b = \sup B$,

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in B} x \leq b \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{x_0 \in B} x_0 > b - \varepsilon.$$

zatem, kres górny zbioru jest najmniejszą liczbą ograniczającą ten zbiór z góry. Jeżeli zbiór B jest nieograniczony z góry, to przyjmujemy

$$\sup B \stackrel{\text{def}}{=} \infty.$$

Uwaga. Najmniejszy element zbioru jest jednocześnie kresem dolnym tego zbioru. Analogicznie, największy element zbioru jest jego kresem górnym.

Każdy niepusty zbiór ograniczony z dołu ma kres dolny.

Każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny.

FUNKCJE

Definicja

Niech zbiory $X, Y \subset R$ będą niepuste. **Funkcją** określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy przez $f: X \rightarrow Y$. Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja

Niech $f: X \rightarrow Y$. Wtedy zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f i oznaczamy przez D_f , a zbiór

$$\{f(x) \in Y : x \in D_f\}$$

nazywamy **zbiorem wartości funkcji** f i oznaczamy przez W_f . Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór elementów z R , dla których wzór ten ma sens liczbowy, nazywamy **dziedziną naturalną** funkcji.

Definicja

Wykresem funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\{(x, y) \in R^2 : x \in X, y = f(x)\}.$$

Podzbiór płaszczyzny xOy jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x , gdy każda prosta pionowa przecina go w co najwyżej jednym punkcie.

Definicja

Funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y , gdy

$$W_f = Y,$$

Definicja

Funkcja $f : X \rightarrow R$ jest **parzysta**, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$(-x \in X \text{ oraz } f(-x) = f(x)).$$

Funkcja jest parzysta, gdy oś Oy jest osią symetrii jej wykresu.

Definicja

Funkcja $f : X \rightarrow R$ jest **nieparzysta**, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$(-x \in X \text{ oraz } f(-x) = -f(x)).$$

Funkcja jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.

Definicja

Funkcja f jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje stała $M > 0$, że dla każdego $x \in A$ zachodzi

$$|f(x)| \leq M.$$

Funkcja jest ograniczona, gdy jej wykres mieści się między dwiema prostymi poziomymi.

Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest **rosnąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))].$$

Funkcja f jest **malejąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))].$$

Funkcja f jest **niemalejąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))].$$

Funkcja f jest **nierosnąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))].$$

Funkcja f jest **monotoniczna** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli jest rosnąca lub malejąca lub nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze.

Definicja

Niech zbiory $X, Y, Z, W \subset R$ będą niepuste, przy czym $Y \subset Z$ oraz niech $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow W$. **Złożeniem funkcji** g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \rightarrow W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ dla } x \in X.$$

Podobnie określa się złożenie większej liczby funkcji. Składanie funkcji nie jest przemienne.

Definicja

Funkcja f jest **różnowartościowa** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))].$$

Definicja równoważna
dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2))].$$

Jeżeli funkcja jest rosnąca albo malejąca na zbiorze A , to jest różnowartościowa na tym zbiorze.

Definicja

Niech funkcja $f: X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa na dziedzinie. Funkcją odwrotną do funkcji f nazywamy funkcję $f^{-1}: Y \rightarrow X$ określoną przez warunek:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x), \text{ gdzie } x \in X, y \in Y.$$

Wykres funkcji f^{-1} otrzymujemy z wykresu funkcji f odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$.

Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest funkcją rosnącą.

Funkcja odwrotna do funkcji malejącej jest funkcją malejącą.

Uwaga

Dla każdego $x \in X$ zachodzi $f^{-1}(f(x)) = x$
oraz

Dla każdego $y \in Y$ zachodzi $f(f^{-1}(y)) = y$.

Funkcje elementarne

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne oraz cyklometryczne. Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji, nazywamy funkcjami elementarnymi.

Wartością bezwzględną (modułem) nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Jest to funkcja elementarna, bo $|x| = \sqrt{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wielomiany

Wielomianem stopnia n o współczynnikach rzeczywistych nazywamy funkcję

$$W(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

Jeśli $a_n = 1$, to mówimy, że wielomian $W(x)$ jest **unormowany**. Każdy wielomian można unormować dzieląc go przez współczynnik przy najwyższej potędze.

Stopień wielomianu $W(x)$ oznaczamy $\deg W(x)$ lub $\text{st} W(x)$.

Wielomian zerowy ma wszystkie współczynniki równe zero, jego stopień nie jest określony.

Własność

- a) $\deg[W(x) + P(x)] \leq \max\{\deg W(x), \deg P(x)\}$,
 b) $\deg[W(x) \cdot P(x)] = \deg W(x) + \deg P(x)$,

Jeśli $P(x)$ jest niezerowy, to dla każdego $W(x)$ istnieją jednoznacznie określone wielomiany $Q(x)$ (iloraz) i $R(x)$ (reszta), że $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$, i $\deg R(x) < \deg P(x)$.

Przykład

Wyznamy iloraz i resztę w dzieleniu wielomianu $W(x) = x^4 + 2x^2 + 20x + 7$ przez $P(x) = x^2 + 4$.

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^2 + 20x + 7 : x^2 + 4 = x^2 - 2 \quad \leftarrow \text{iloraz} \\ \underline{x^4 + 4x^2} \\ -2x^2 + 20x + 7 \\ \underline{-2x^2 - 8} \\ 20x + 15 \quad \leftarrow \text{reszta} \end{array}$$

Zatem $x^4 + 2x^2 + 20x + 7 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) + 20x + 15$.

Ważnym przypadkiem szczególnym dzielenia wielomianów z resztą jest dzielenie przez jednomian $x - a$. Wtedy $W(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$, i $\deg R(x) = 0$, $R(x) = r = W(a)$ (twierdzenie Bézouta). Prosty sposób wyznaczania ilorazu i reszty w tym przypadku jest tzw. **schemat Hornera**.

Jeśli $W(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ to współczynniki ilorazu $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$ i resztę $R(x) = r$ wyznaczamy wypełniając tabelkę:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$	$\dots$	$b_1 = a_2 + ab_2$	$b_0 = a_1 + ab_1$	$r = a_0 + ab_0$

Zauważmy, że schemat Hornera pozwala wyznaczyć wartość wielomianu w dowolnym punkcie, przez wykonanie niewielkiej ilości mnożeń co ma istotny wpływ na szybkość i prostotę obliczeń.

Przykład

Wyznamy (stosując schemat Hornera) iloraz i resztę w dzieleniu wielomianu $W(x) = x^4 + 2x^2 + 20x + 7$ przez $x + 3$.

	1	0	2	20	7
-3	1	-3	11	-13	46

Zatem $x^4 + 2x^2 + 20x + 7 = (x + 3)(x^3 - 3x^2 + 11x - 13) + 46$.

Wielomian $D(x)$ jest **największym wspólnym dzielnikiem wielomianów** $W_1(x)$ i $W_2(x)$, co zapisujemy $\text{NWD}(W_1, W_2) = D(x)$, jeśli

- a) jest unormowany,

- b) jest dzielnikiem wielomianów $W_1(x)$ i $W_2(x)$, tzn. $W_1(x)$ i $W_2(x)$ dzielą się bez reszty przez $D(x)$,
 c) każdy inny dzielnik wielomianów $W_1(x)$ i $W_2(x)$, jest dzielnikiem $D(x)$.

Wielomiany $W_1(x)$, $W_2(x)$ są **względnie pierwsze** gdy $\text{NWD}(W_1, W_2) = 1$.

Twierdzenie

Jeśli co najmniej jeden z wielomianów $W_1(x)$ i $W_2(x)$ jest różny od zera, to istnieje $\text{NWD}(W_1, W_2)$ i można go wyznaczyć za pomocą **algorytmu Euklidesa**.

Mamy bowiem:

$\text{NWD}(W_1, 0) = \text{unormowanie wielomianu } W_1$.

$\text{NWD}(W_1, c) = 1$, gdzie c to stała (czyli wielomian stopnia zerowego).

Jeśli $\deg W_1(x) \geq \deg W_2(x)$, to $\text{NWD}(W_1, W_2)$ wyznaczamy następująco: dzielimy $W_1(x)$ przez $W_2(x)$ otrzymujemy resztę $W_3(x)$, jeśli $W_3(x) = 0$ to $\text{NWD}(W_1, W_2) = \text{unormowanie wielomianu } W_2$, w przeciwnym przypadku dzielimy $W_2(x)$ przez $W_3(x)$ otrzymujemy resztę $W_4(x)$, jeśli $W_4(x) = 0$ to $\text{NWD}(W_1, W_2) = \text{unormowanie wielomianu } W_3$, w przeciwnym przypadku kontynuujemy dzielenie kolejnych reszt, a ponieważ reszty są coraz niższego stopnia to algorytm ma skończoną liczbę kroków.

Przykład

Wyznamy NWD wielomianów $x^4 + 3x^2 + 2$ i $x^3 - x^2 + x - 1$.

Krok 1.

$$x^4 + 3x^2 + 2 : x^3 - x^2 + x - 1 = x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 + x^2 - x \\ \hline x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ x^3 - x^2 + x - 1 \\ \hline 3x^2 + 3 \end{array}$$

Krok 2.

$$x^3 - x^2 + x - 1 : 3x^2 + 3 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad \quad + x \\ \hline -x^2 - 1 \\ -x^2 - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Skoro ostatnia reszta jest zerowa to NWD jest równe unormowaniu reszty poprzedniej, tzn.

$$\text{NWD}(x^4 + 3x^2 + 2, x^3 - x^2 + x - 1) = x^2 + 1.$$

Wielomian stopnia większego od zera jest **pierwszy** jeśli nie można go przedstawić w postaci iloczynu wielomianów o stopniach większych od zera.

Każdy wielomian stopnia większego od zera można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów pierwszych, przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do stałych czynników.

Funkcje wymierne

Funkcje wymierne to ilorazy wielomianów

$$f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}, \quad P(x) \neq 0$$

W szczególności każdy wielomian jest funkcją wymierną.

Jeśli stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika, to funkcję wymierną nazywamy **właściwą**.

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i skończonej liczby **ułamków prostych**, tzn. funkcji postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad (\text{ułamki proste pierwszego rodzaju});$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}, \text{ przy czym } b^2-4c < 0, (\text{ułamki proste drugiego rodzaju});$$

Rozkład na ułamki proste wykorzystuje się m.in. w pewnych zagadnieniach rachunku całkowego.

Przykład

Rozłożymy $\frac{x^3-x^2+x}{x^2-x-2}$ na ułamki proste.

Ponieważ iloraz licznika przez mianownik jest niezerowy, to $\frac{x^3-x^2+x}{x^2-x-2} = x + \frac{3x}{x^2-x-2}$.

Następnie rozkładamy mianownik na nierozkładalne czynniki $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$. Ponieważ są to czynniki liniowe i pierwiastki są jednokrotne to przewidujemy rozkład na ułamki pierwszego

rodzaju $\frac{A}{(x+1)}$ i $\frac{B}{(x-2)}$. Współczynniki A, B wyznaczamy z równania

$$\frac{3x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} \quad (\text{prawą stronę sprowadzamy do wspólnego mianownika i}$$

porównujemy liczniki). Stąd $A = 1, B = 2$ i ostatecznie $\frac{x^3-x^2+x}{x^2-x-2} = x + \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x-2)}$.

Uwaga

Ułamki proste drugiego rodzaju przewidujemy w rozkładzie, gdy mianownik zawiera nierozkładalne

czynniki stopnia drugiego, np. $\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$.

Każdemu czynnikowi $(x-a)^n$ w rozkładzie mianownika odpowiada suma ułamków

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}, \text{ np. } \frac{1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B_1}{(x-2)} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$$

Podobnie każdemu czynnikowi $(x^2+bx+c)^n$, gdy $b^2-4c < 0$, w rozkładzie mianownika

odpowiada suma ułamków $\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$, np.

$$\frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+2} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2)^2}.$$

Zadania

Zadanie 1

Wyznaczyć iloraz i resztę w dzieleniu wielomianu

a) $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ przez $x^2 - x + 1$,

b) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 1$ przez $x^2 + 2x - 3$,

c) $2x^2 - 3x + 1$ przez $x^3 + 4$.

(odp. a) $2x^2 + 7x + 12, 7x - 8$; b) $x^2 + 2x + 4, -3x + 11$; c) $0, 2x^2 - 3x + 1$)

Zadanie 2

Wyznaczyć (stosując schemat Hornera) iloraz i resztę w dzieleniu wielomianu

a) $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8x - 3$ przez $x - 4$,

b) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ przez $x - 1$,

c) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ przez $x + 3$.

(odp. a) $2x^3 + 5x^2 + 15x + 68$, 269; b) $x^3 - x^2 + 3x - 3$, 5;

c) $2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$, -327)

Zadanie 3

Wyznaczyć NWD następujących wielomianów

a) $x^3(x+1)^2(x-2)(x+1)$ oraz $x^3(x+1)(x+3)$,

b) $(x^3 - 8)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4)^3$ oraz $(x^2 - 4)^2$,

(odp. a) $x^3(x+1)$; b) $(x^2 - 4)^2$

Zadanie 4

Rozłożyć następujące funkcje wymierne na ułamki proste.

a) $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

b) $\frac{1}{x^3 - 1}$

(odp. a) $\frac{1/12}{(x-1)} - \frac{4/3}{(x+2)} + \frac{9/4}{(x+3)}$; b) $\frac{1/3}{(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{9/4}{(x+3)}$

Zadanie 5

Ile wynosi stopień wielomianu $W(x) = [(-2x^5 + x^2 - 3x + 1)(2x^5 - x^2 + 3x + 1)]^2$?

odp. 20

Zadanie 6

Uzasadnij dlaczego wielomian $W(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ jest podzielny bez reszty przez dwumian $x + 1$.

Zadanie 7

Niech $W(x) = x^2 + 1$, $P(x) = x^2 - 1$. Wyznacz wielomian $W(P(x))$.

odp. $x^4 - 2x^2 + 2$

Zadanie 8

Ile wynosi reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = -2x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$ przez jednomian $x + 1$?

odp. 2

Zadanie 9

Rozłóż wielomian $W(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ na czynniki liniowe.

odp. $(x+2)^2(x-2)$

Funkcja wykładnicza.

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Własności

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Uwaga.

Funkcję wykładniczą przy podstawie $e \approx 2,718$ oznaczamy niekiedy przez $\exp$;

$$\exp x = e^x.$$

Funkcja logarytmiczna.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \quad a > 0, a \neq 1 \text{ jest podstawą logarytmu,} \quad x > 0.$$

Własności

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \text{w szczególności} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Uwaga.

Logarytm przy podstawie e z liczby x nazywamy **logarytmem naturalnym** i oznaczamy przez $\ln x$;

$$\ln x = \log_e x.$$

Logarytm przy podstawie 10 z liczby x nazywamy **logarytmem dziesiętnym** i oznaczamy przez $\lg x$;

$$\lg x = \log_{10} x.$$

Zadanie 1

Oblicz. $\log_2 8$, $\log_6 \sqrt{6}$, $\log_5 0,2$.

Zadanie 2

Oblicz $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \left(\frac{25}{4} \right)$.

odp. 2

Zadanie 3

Oblicz $(3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} + 81^{-\frac{1}{4}}$.

odp. $\frac{2}{3}$

Zadanie 4

Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \log_2(x-1)$.

odp. $g(x) = 2^x + 1$

Zadanie 5

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{4-x}(x^2 - 2x)$.

odp. $(-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$

Zadanie 6

Która z poniższych funkcji jest parzysta:

a) $f(x) = \lg \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$

b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

c) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$

d) $f(x) = \lg \frac{|x|}{x}$

Zadanie 7

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 3)$.

odp. $[1; \infty)$

Zadanie 8

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 0,2^{-x^2+4x-6}$.

odp. $[25; \infty)$

Zadanie 9

Przekształć do najprostszej postaci.

a) $\frac{x^6 \cdot x^{-3}}{x^2}, \quad x \neq 0$

b) $\frac{(x^8 \cdot x^3)^4}{x^{-7} \cdot x^{-9}}, \quad x \neq 0$

c) $\frac{(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x})^{12}}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x^6}}, \quad x > 0$

d) $(x^{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{x})^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}, \quad x \geq 0$

Zadanie 10

Zapisz jako potęgę liczby 2.

a) $(16^3 \cdot 4)^5$

b) $0,125 \cdot 0,25$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $8\sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt{2\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{8\sqrt{8\sqrt{8}}}$

Literatura: H.Matuszewska, W.Matuszewski, "*Elementy logiki i teorii mnogości*".