

CIĄGI LICZBOWE

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb **naturalnych**.

R – zbiór liczb **rzeczywistych** (zbiór reprezentowany przez punkty osi liczbowej).

Nieskończony ciąg liczbowy to przyporządkowanie liczbom naturalnym liczb rzeczywistych.

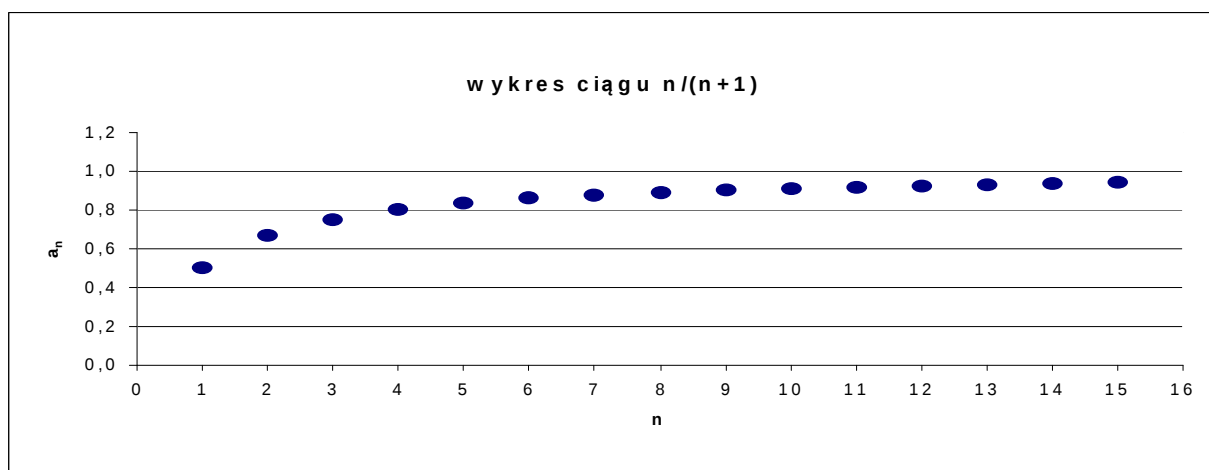
1	2	3		n	
↓	↓	↓	...	↓	...
a_1	a_2	a_3		a_n	

Liczy a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ nazywamy **wyrazami ciągu**. Stosujemy zapis $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, lub oznaczenie (a_n) .

Rozpatrzmy trzy charakterystyczne przykłady ciągów. Pewne własności ciągów można odczytać z ich wykresów.

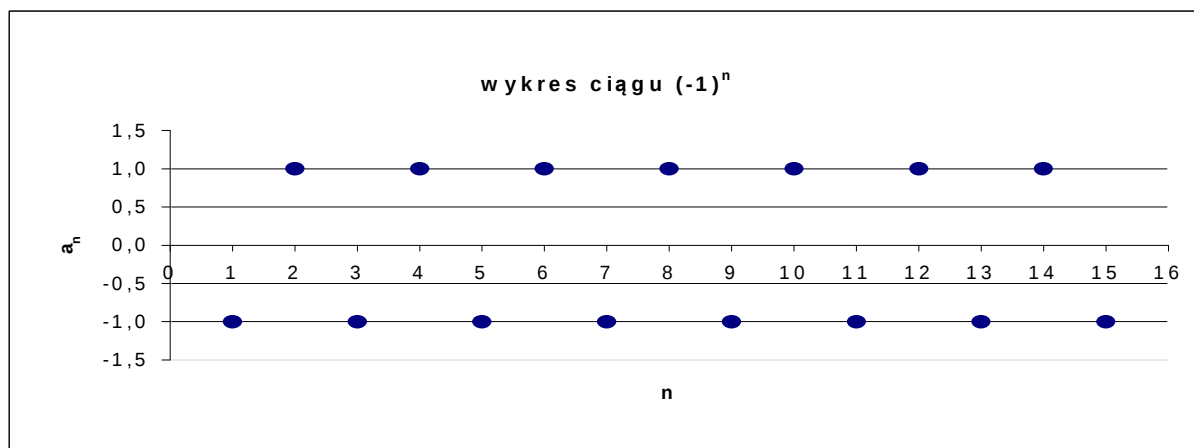
Przykład

$a_n = \frac{n}{n+1}$, zatem początkowe wyrazy wynoszą $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right)$



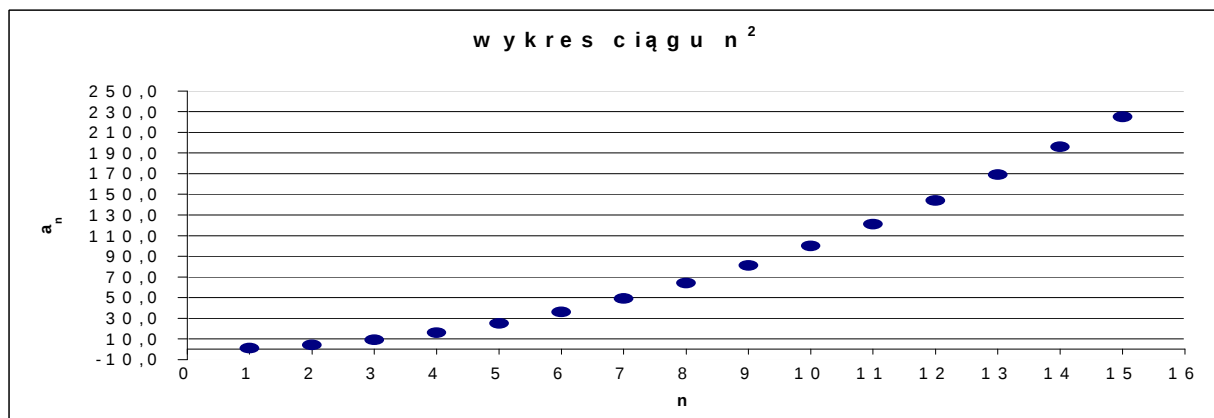
Przykład

$a_n = (-1)^n$, zatem początkowe wyrazy wynoszą $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$



Przykład

$a_n = n^2$, zatem początkowe wyrazy wynoszą (1, 4, 9, 16, 25, 36,...)



Oprócz podania analitycznego wzoru na n – ty wyraz ciągu można je też definiować rekurencyjnie.

Rekurencyjna definicja ciągu - przykłady

1) a_1 - dane,

$$a_{n+1} = a_n + r \quad (r - \text{stała}),$$

w ten sposób definiujemy **ciąg arytmetyczny**

2) a_1 - dane,

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q - \text{stała}),$$

w ten sposób definiujemy **ciąg geometryczny**

3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, **ciąg Fibonacciego**

Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) jest:

- **rosnący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} > a_n$

- **malejący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} < a_n$

- **niemalejący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \geq a_n$

- **nierosnący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \leq a_n$

Ciąg jest **monotoniczny** jeśli zachodzi dowolny z powyższych warunków.

W przypadku dwóch pierwszych warunków ciąg **jest ściśle monotoniczny**.

W przypadku dwóch ostatnich warunków ciąg **jest słabo monotoniczny**.

Przykład

Ciąg $a_n = n^2$, jest monotoniczny.

Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest monotoniczny.

Ciągi ograniczone

Ciąg (a_n) jest **ograniczony** gdy $\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq M$

Oznacza to, że dla pewnego M wszystkie wyrazy ciągu spełniają warunek $-M \leq a_n \leq M$, tzn. wykres ciągu można zawrzeć w ograniczonym pasku wyznaczonym przez dwie proste poziome.

Przykład

Ciąg $a_n = n^2$, nie jest ograniczony.

Ciąg $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony.

Granica ciągu.

g - liczba rzeczywista

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ oznacza, że

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} |a_n - g| \leq \varepsilon$$

tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wszystkie wyrazy ciągu o wyrazach większych niż ustalone δ spełniają warunek

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq g + \varepsilon$$

stosujemy też zapis uproszczony:

$$\lim a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow g$$

Przykład

Ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$, jest zbieżny, ma granicę 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy.

Granica niewłaściwa ciągu.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oznacza, że

$$\bigwedge_A \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} a_n > A$$

zapis uproszczony:

$$\lim a_n = \infty \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow \infty$$

Przykład

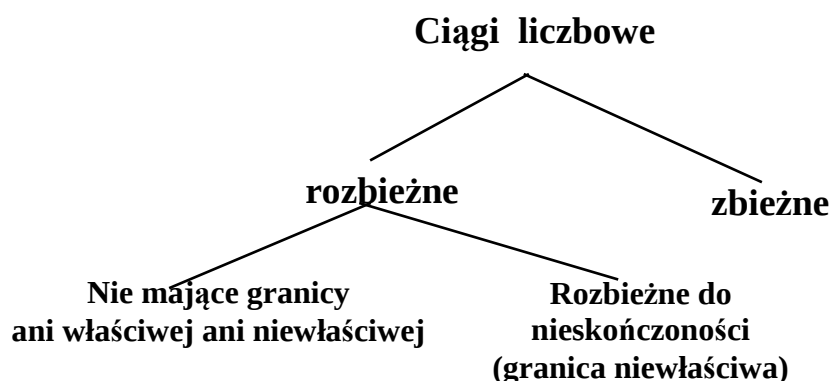
Ciąg $a_n = n^2$, ma granicę niewłaściwą $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ oznacza, że $\bigwedge_A \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} a_n < A$
 zapis uproszczony:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow -\infty$$

Własność. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = \infty$

Klasyfikacja ciągów:



Własności

- 1) jeśli ciąg jest zbieżny to ma dokładnie jedną granicę,
- 2) ciąg zbieżny jest ograniczony (odwrotna własność nie zachodzi np. $a_n = (-1)^n$),
- 3) ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny,

Rachunek granic skończonych.

Jeśli ciągi (a_n) , (b_n) są zbieżne to:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (b_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0)$

Symbole nieoznaczone.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$$

Przykłady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot n\{0 \cdot \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n^2\{0 \cdot \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot n^2\{0 \cdot \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Widzimy zatem, że ten sam symbol nieoznaczony może oznaczać różne granice, co uzasadnia jego nazwę.

Podstawowe wzory

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty \quad k - \text{liczba dodatnia,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^k} = 0 \quad k - \text{liczba dodatnia,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Własności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{a_n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 ; (b_n) \text{ ograniczony} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty ; (b_n) \text{ ograniczony} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \pm\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } a_n > 0 \\ -\infty & \text{gdy } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0 \\ -\infty & \text{gdy } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 0 \end{cases}$$

Liczba e (liczba Eulera)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281 \approx 2,72$$

Uwaga:

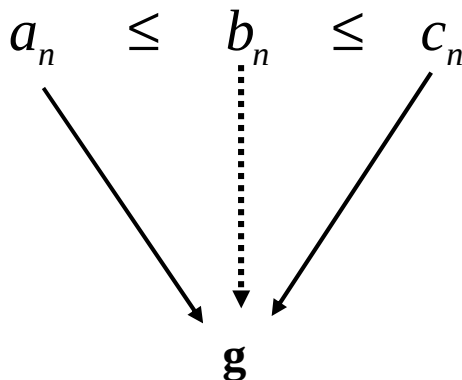
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \text{gdzie } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq b_n \leq c_n$

oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$



Przykłady

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^5 + 2n}{2n^5 + 1} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \frac{n^5}{n^5} + 2 \frac{n}{n^5}}{2 \frac{n^5}{n^5} + \frac{1}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^5}} = \frac{6}{2} = 3$$

(licznik i mianownik podzieliliśmy przez najwyższą potęgę mianownika tzn. przez n^5)

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 + 2n}{2n^5 + 1} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \frac{n^6}{n^5} + 2 \frac{n}{n^5}}{2 \frac{n^5}{n^5} + \frac{1}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + \frac{2}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^5}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 2n}{2n^5 + 1} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \frac{n^4}{n^5} + 2 \frac{n}{n^5}}{2 \frac{n^5}{n^5} + \frac{1}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} + \frac{2}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^5}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+4}) \{ \infty - \infty \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 4}{\sqrt{n} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{n} + \sqrt{n+4}} = \frac{-4}{\infty} = 0$$

Skorzystaliśmy z przekształcenia $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ wynikającego z wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n} - \sqrt{n+4}) \{ \infty - \infty \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n - 4}{\sqrt{2n} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 4}{\sqrt{n} + \sqrt{n+4}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ e) \quad & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{n}} - \frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}} + \sqrt{\frac{n+4}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n} - 4}{\sqrt{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} = \frac{\infty}{1 + \sqrt{1}} = \infty \end{aligned}$$

(w drugim wierszu licznik i mianownik podzieliliśmy przez najwyższą potęgę mianownika tzn. przez $\sqrt{n}$)

$$f) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{2n+1}{n} = e^2, \quad \text{bo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

$$g) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^{3n} \frac{n-2}{3n} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \quad \text{bo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$h) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

$$i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow 3$$

$$\text{Zatem } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$$

(*) Stopa wzrostu ciągu.

(a_n) - ciąg o wyrazach dodatnich.

Stopa wzrostu wyrazu a_n ($n > 1$) to

$$k_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} \quad \text{dla } n = 1 \quad \text{przyjmujemy } k_1 = 0$$

Powyższy wzór można stosować np. do obliczania stóp zwrotu akcji, wtedy ciąg (a_n) to ciąg notowań rozpatrywanych akcji. Stopy zwrotu wyrażamy często w procentach.

Ciąg stały ma zerowe stopy wzrostu.

Ciąg arytmetyczny ma stopy wzrostu dążące do zera.

Ciąg geometryczny ma stałe stopy wzrostu.

Procent prosty.

K_0 - kapitał początkowy,

p - roczna stopa procentowa,

K_n - wartość kapitału po n latach,

Odsetki po każdym roku są stałe i wynoszą $K_0 \frac{p}{100}$ zatem

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{np}{100} \right)$$

Ciąg kapitałów $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym.

Procent składany.

Odsetki po kolejnych latach wynoszą $K_0 \frac{p}{100}, K_1 \frac{p}{100}, K_2 \frac{p}{100}, \dots$ itd.

Zatem

$$K_1 = K_0 + K_0 \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right),$$

$$K_2 = K_1 + K_1 \frac{p}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2,$$

itd.

Ogólnie

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Ciąg kapitałów $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ jest ciągiem geometrycznym.

Jeśli

k = **liczba kapitalizacji** odsetek w ciągu roku

to po n latach wartość kapitału wynosi

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{k100} \right)^{nk}$$

Oprocentowanie ciągłe: ($k \rightarrow \infty$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_n = \lim_{k \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{p}{k100} \right)^{kn} = K_0 e^{\frac{np}{100}}$$

Sumy częściowe ciągu (a_n):

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

Stosujemy zapis:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Ciąg (S_n) nazywamy **ciągą sum częściowych**.

Suma ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Przykład

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1+100}{2} 100 = 5050$$

Przykład

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = \frac{2+100}{2} 50 = 2550$$

Suma ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{gdyn } q \neq 1$$

$$S_n = a_1 n \quad \text{gdyn } q = 1$$

Przykład

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \frac{1-2^6}{1-2} = 63$$

Przykład

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = \frac{1-10^5}{1-10} = 11111$$

CIĄGI - zadania

1. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{5-3n}$ [-2]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{-2n^2-1}$ [-0,5]

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^3 + 1}$ [0]

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{16n^2 - 1}{2n + 4n^2}}$ [2]

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{(2n+3)^6}$ [1/64]

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 2n!}{(n+1)! + 3n!}$ [1]

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^n}{3^n + 5^n}$ [-1]

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 999}{2^{n+2} + 9}$ [1/2]

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + (-5)^n}{10^n}$ [0]

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+3}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$ [2]

2. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+8} - \sqrt{n})$ [0]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ [0,5]

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 2n})$ [-1]

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 4n} - n)$ [0]

3. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ [$\sqrt{e}$]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{6n}$ [e^3]

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{8n}$ [e^{-4}]

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)^{\frac{n^2 + 3}{2}}$ [$\sqrt{e}$]

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n+3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ [$e^{-0,75}$]

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^n$ [1]

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{4n}$ [e^{-8}]

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 - 3}\right)^{n^2}$ [e^5]

4. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2}$ [∞]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 2)^4}$ [0]

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}$ [1]

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$ [4]

5. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 9^n + 7^n}$ [9]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + 5n^6}$ [1]

(*) SZEREGI LICZBOWE.

Szereg liczbowy to nieskończony ciąg sum częściowych:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Przykład.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Przykład.

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Przykład.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny** jeśli ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny. W przeciwnym przypadku mówimy, że szereg jest rozbieżny.

Wtedy $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nazywamy sumą szeregu.

Przykład.

Szereg $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ jest zbieżny ma sumę równą 1.

Przykład.

Szereg $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ jest rozbieżny.

Warunek konieczny zbieżności szeregu:

Twierdzenie.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Uwaga.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ spełnia warunek konieczny lecz nie jest zbieżny.

Szereg geometryczny.

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad q = \text{const}$$

Suma szeregu geometrycznego.

$$\text{Gdy } |q| < 1 \text{ to } S = \frac{a}{1-q}$$

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8}$$

Przykład.

Stosując wzór na sumę ciągu geometrycznego można zamieniać ułamki okresowe na zwykłe.

$$0,27272727\dots = 0(27) = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + \dots = \frac{0,27}{1-0,01} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Szereg harmoniczny rzędu r.

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

Twierdzenie.

Szereg harmoniczny rzędu $r > 1$ jest zbieżny.

Szereg harmoniczny rzędu $r \leq 1$ jest rozbieżny.

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{jest zbieżny (} r = 2 > 1 \text{)}$$

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{jest rozbieżny (} r = 0,5 < 1 \text{)}$$

Definicja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{- dany szereg.}$$

Jeśli $\bigwedge_{n \in N} a_n \leq b_n$ to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{nazywamy } \mathbf{majorantą} \text{ szeregu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Jeśli $\bigwedge_{n \in N} c_n \leq a_n$ to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{nazywamy } \mathbf{minorantą} \text{ szeregu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Kryteria zbieżności szeregów = warunki dostateczne zbieżności szeregu.

Zakładamy, że $a_n \geq 0$.

Kryterium porównawcze.

Majoranta danego szeregu zbieżna $\Rightarrow$ dany szereg zbieżny.

Minoranta danego szeregu rozbieżna $\Rightarrow$ dany szereg rozbieżny.

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4} \quad \text{jest zbieżny, bo ma majorantę zbieżną}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (r = 2 > 1)$$

Kryterium ilorazowe (d'Alemberta).

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$

Jeśli $g > 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,

Jeśli $g < 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

Jeśli $g = 1$ to kryterium ilorazowe nie rozstrzyga o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykład.

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a_n = \frac{n^n}{n!},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1 \end{aligned}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ jest zatem rozbieżny na mocy kryterium ilorazowego.

Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego).

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$

Jeśli $g > 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,

Jeśli $g < 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

Jeśli $g = 1$ to kryterium pierwiastkowe nie rozstrzyga o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykład.

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}$, $a_n = \frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(\sqrt[n]{n})^2}{n} = 0 < 1$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}$ jest zatem zbieżny na mocy kryterium pierwiastkowego.

SZEREGI - zadania

1. Wyznacz sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$ [3] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ [1,5]

2. Stosując kryterium porównawcze zbadaj zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+2}{n^2+1}$ [rozb.] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2+1}$ [zb.]
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\dots+n}{n^4}$ [zb.] d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\dots+n}{2+n^3}$ [rozb.]

3. Stosując kryterium ilorazowe zbadaj zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$ [rozb.] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^6}$ [rozb.]
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ [zb.] d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)5^n}{(2n)!}$ [zb.]

4. Stosując kryterium pierwiastkowe zbadaj zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^6}$ [rozb.] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$ [rozb.]
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{2^{n+2}}$ [rozb.] d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^{n+2}}{n^{5n} 2^n}$ [zb.]

GRANICA FUNKCJI

Granica funkcji.

x_0 - dowolna liczba rzeczywista.

$(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ - **otoczenie** liczby (punktu) x_0 o promieniu ε ,

$(x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ - **sąsiedztwo** liczby (punktu) x_0 o promieniu ε ,

Niech funkcja f będzie określona w sąsiedztwie (punktu) x_0 , g niech będzie liczbą lub $+\infty$, lub $-\infty$.

Definicja.

Granica funkcji f w punkcie x_0 jest równa g , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji, zbieżnego do x_0 , o wyrazach różnych od x_0 , ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji ma granicę równą g .

Zapis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

Analogicznie określamy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$$

i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$$

Uwaga.

- a) rachunek granic skończonych jak dla granic ciągów,
- b) symbole nieoznaczone jak dla granic ciągów.

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Granice jednostronne funkcji.

Niech funkcja f będzie określona w lewostronnym sąsiedztwie (punktu) x_0 , g niech będzie liczbą lub $+\infty$, lub $-\infty$.

Definicja.

Granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0 jest równa g , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji, zbieżnego do x_0 , o wyrazach mniejszych od x_0 , ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji ma granicę równą g .

Zapis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = g \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = g$$

Analogicznie określamy granicę prawostronną:

Zapis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = g \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = g$$

Twierdzenie.

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g wtedy i tylko wtedy gdy istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 i są one równe g tzn.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = g \wedge \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = g \right)$$

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \text{granice jednostronne s\k{a} r\k{o}żne}$$

zatem $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ nie istnieje.

Niekt\k{o}re granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1, \text{ gdzie } k - \text{stała } \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \text{ gdzie } k - \text{stała},$$

Funkcja ci\k{a}gła.

Funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 jest ci\k{a}gła w punkcie x_0 , gdy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Analogicznie określamy **jednostronn\k{a} ci\k{a}głość** funkcji.

Funkcja f jest **ci\k{a}gła w przedziale**, gdy jest ci\k{a}gła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja jest **ci\k{a}gła** gdy jest ci\k{a}gła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykład

Funkcja $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nie jest ci\k{a}gła dla $x = 0$, granica jest inna niź wartość funkcji w tym punkcie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$. Jest to przykład **nieci\k{a}głości usuwalnej**.

Przykład

Funkcja $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ nie jest ci\k{a}gła dla $x = 0$, granice jednostronne w tym punkcie, chociaź istnieją i s\k{a} właściwe, to s\k{a} r\k{o}żne. Jest to przykład **nieci\k{a}głości I rodzaju**.

Przykład

Funkcja $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ nie jest ci\k{a}gła dla $x = 0$, nie istnieją nawet granice jednostronne funkcji w tym punkcie. Jest to przykład **nieci\k{a}głości II rodzaju**.

Jest to przykład **nieci\k{a}głości II rodzaju**.

Przykład (funkcja Dirichleta)

Funkcja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \text{ wymierne} \\ 0 & \text{gdy } x \text{ niewymierne} \end{cases}$ nie jest ci\k{a}gła w żadnym punkcie.

Twierdzenie (o ci\k{a}głości sumy, r\k{o}żnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g s\k{a} ci\k{a}głe w punkcie x_0 , to:

- funkcje $f+g$, $f-g$ s\k{a} ci\k{a}głe w punkcie x_0 ;
- funkcja $f \cdot g$ jest ci\k{a}gła w punkcie x_0 ;
- funkcja $\frac{f}{g}$ jest ci\k{a}gła w punkcie x_0 , o ile $g(x_0) \neq 0$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe takźe dla funkcji ci\k{a}głych jednostronnie.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,
 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,
- to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła i rosnąca na przedziale $[a, b]$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła i rosnąca na przedziale $[f(a), f(b)]$.

Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla funkcji malejącej.

Uwaga

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o monotoniczności funkcji ciągłej i różnowartościowej)

Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Wówczas, funkcja f jest różnowartościowa na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest malejąca albo rosnąca na tym przedziale.

Twierdzenie.

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale wartość najmniejszą i wartość największą.

Twierdzenie (własność Darboux).

Zakładamy, że funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$.

Jeśli $f(a) \neq f(b)$ oraz $f(a) \leq g \leq f(b)$ lub $f(b) \leq g \leq f(a)$

to istnieje $c \in \langle a, b \rangle$, że $f(c) = g$.

Wniosek. Jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$ to istnieje $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.

Powyższy wniosek pozwala w prosty sposób wyznaczać przybliżone miejsce zerowe dowolnej funkcji ciągłej w danym przedziale, (jeśli istnieje) należy dzielić dany przedział na podprzedziały na końcach których funkcja ma różne znaki np. metodą połowienia.

Asymptoty.

Asymptota pionowa.

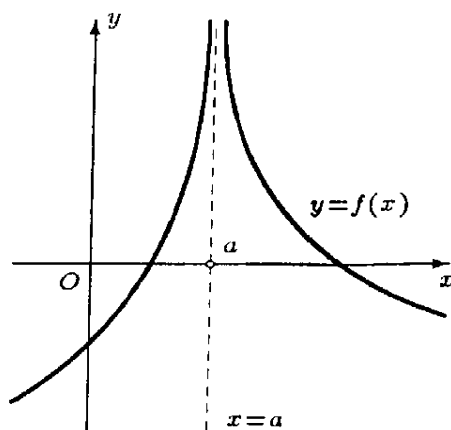
Prosta $x = a$ jest **pionową asymptotą prawostronną** funkcji f jeśli funkcja f jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu a oraz

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$$

Prosta $x = a$ jest **pionową asymptotą lewostronną** funkcji f jeśli funkcja f jest określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$$

Prosta $x = a$ jest **pionową asymptotą obustronną** funkcji f jeśli ta prosta jest pionową asymptotą prawostronną i jest pionową asymptotą lewostronną funkcji f .



asymptota pionowa

Asymptota pozioma.

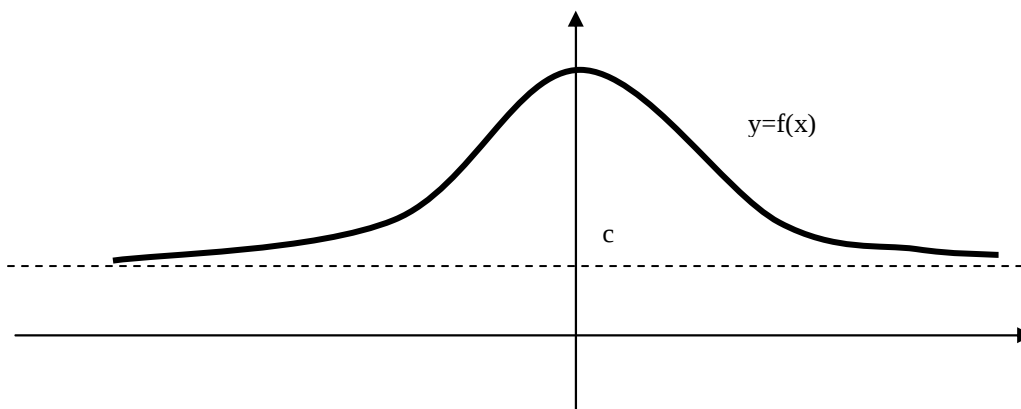
Prosta $y = c$ jest **poziomą asymptotą prawostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$$

Prosta $y = c$ jest **poziomą asymptotą lewostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$$

Prosta $y = c$ jest **poziomą asymptotą obustronną** funkcji f jeśli ta prosta jest poziomą asymptotą prawostronną i jest poziomą asymptotą lewostronną funkcji f .



asymptota pozioma

Asymptota ukośna.

Prosta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) jest **ukośną asymptotą prawostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

Prosta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) jest **ukośną asymptotą lewostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$$

Prosta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) jest **ukośną asymptotą obustronną** funkcji f jeśli ta prosta jest ukośną asymptotą prawostronną i jest ukośną asymptotą lewostronną funkcji f .

Uwaga.

Dla dużych $|x|$ wartość funkcji w punkcie x jest w przybliżeniu równa $ax + b$ tzn.:

$$f(x) \cong ax + b$$

GRANICA FUNKCJI - zadania

1. Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}$ [-12]	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 4x + 5}{4x^2 + 8x + 1}$ [- 0,5]
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 6x + 3}}$ [1]	d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ [3]
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ [1]	f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 4x}$ [0,5]

2. Oblicz granice jednostronne funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$	dla $x = 2$	$[f(2-) = -\infty, f(2+) = \infty]$
b) $f(x) = \frac{1}{2-x}$	dla $x = 2$	$[f(2-) = \infty, f(2+) = -\infty]$
c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$	dla $x = 0$	$[f(0-) = 0, f(0+) = \infty]$
d) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$	dla $x = 0$	$[f(0-) = \infty, f(0+) = 0]$

3. Wyznacz asymptoty funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$	$[x = 3, y = 2]$
b) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 7}{x+2}$	$[x = -2, y = 2x - 1]$
c) $f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$	$[x = -2, x = 1, y = 4x - 2]$
d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	$[y = -x, y = x]$
e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$	$[x = 0, y = 1]$

4. Sprawdź, że funkcja f jest ciągła:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$	
b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$	

POCHODNA FUNKCJI.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x ,
 $h \neq 0$ takie że $x + h$ należy do tego otoczenia.

x - argument wyjściowy,

$f(x)$ - wyjściowa wartość funkcji,

h - przyrost argumentu,

$f(x + h)$ - końcowa wartość funkcji,

$f(x + h) - f(x)$ - przyrost funkcji,

$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ - iloraz różnicowy,

Definicja.

Pochodna funkcji f w punkcie x to granica ilorazu różnicowego gdy przyrost argumentu dąży do zera (o ile granica ta istnieje).

Zapis:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

inne oznaczenie:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Podobnie można zdefiniować pochodne jednostronne (należy rozpatrywać jednostronne granice ilorazu różnicowego).

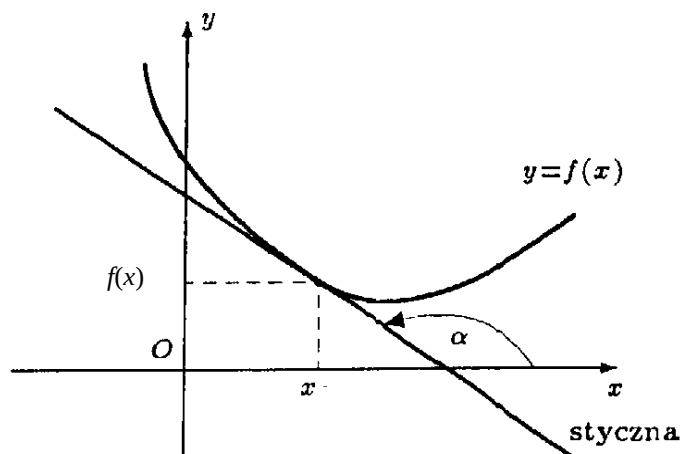
Pochodną równą $\pm \infty$ nazywamy niewłaściwą.

Interpretacja pochodnej.

Interpretacja geometryczna.

$f'(x) = \tan \alpha$ gdzie α jest kątem nachylenia stycznej w punkcie $(x, f(x))$ do osi OX .

(dlatego $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej dla $x = 0$, (brak stycznej))



Interpretacja ekonomiczna.

Dla małych (bliskich 0) h mamy

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{stąd} \quad f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$$

zatem przyrost funkcji odpowiadający małemu przyrostowi argumentu h jest wprost proporcjonalny do h , a współczynnikiem proporcjonalności jest $f'(x)$.

Różniczkowalność = istnienie pochodnej,

Różniczkowalność w przedziale = różniczkowalność w każdym punkcie tego przedziału.

Uwaga.

Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x to f jest ciągła w tym punkcie.

(odwrotna własność nie jest prawdziwa np. $f(x) = |x|$).

Rachunek pochodnych:

f, g - różniczkowalne w punkcie x , c - stała,

$$(cf)' = cf'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (\text{pochodna sumy (różnicy) funkcji})$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\text{pochodna iloczynu funkcji})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (\text{pochodna ilorazu funkcji})$$

$$\text{Jeśli } f = g(h) \text{ to } f' = g'(h) \cdot h' \quad (\text{pochodna funkcji złożonej})$$

Podstawowe wzory.

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{w szczególności } (c)' = 0, (x)' = 1, (x^2)' = 2x, \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(e^x)' = e^x, \quad \text{ogólnie} \quad (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{ogólnie} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Przykład.

$$(a) \quad (2x^3 - 5x^2 + 7x + 4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + (4)' = 6x^2 - 10x + 7$$

$$(b) \quad (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = xe^x (x + 2)$$

$$(c) \quad \left(\frac{2x+3}{x^2+2x-3}\right)' = \frac{(2x+3)'(x^2+2x-3) - (2x+3)(x^2+2x-3)'}{(x^2+2x-3)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+2x-3) - (2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{-2x^2 - 6x - 12}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$(d) \quad ((2x^3 + 5)^4)' = 4(2x^3 + 5)^3 (2x^3 + 5)' = 24x^2 (2x^3 + 5)^3$$

$$(e) \quad (x^x)' = \{a^b = e^{b \ln a}\}' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$$

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Niech

1. funkcja f będzie ciągła na przedziale (a, b) ,
2. funkcja f będzie malejąca albo rosnąca na przedziale (a, b) ,
3. $f'(x_0) \neq 0, x_0 \in (a, b)$.

Wtedy funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wzór ten jest prawdziwy także dla pochodnych jednostronnych właściwych i niewłaściwych.

Uwaga

Pochodne funkcji elementarnych są funkcjami elementarnymi.

Ekonomiczne zastosowania pochodnej.

Stopa wzrostu funkcji (tempo wzrostu funkcji).

Zakładamy, że funkcja f jest określona i różniczkowalna w $\langle A; +\infty \rangle, A > 0, f(x) > 0$.

$$s(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{względna prędkość wzrostu funkcji w stosunku do } f(x))$$

Koszt krańcowy.

x - wielkość produkcji,

$K(x)$ - całkowity koszt produkcji,

h - przyrost produkcji,

$K(x + h) - K(x)$ = przyrost kosztów produkcji,

Mamy:

$$K(x + h) - K(x) \approx K'(x) \cdot h$$

niech $h = 1$ (najmniejszy możliwy przyrost produkcji - zwiększamy produkcję o 1 szt.), wtedy

$$\underbrace{K(x + 1) - K(x)}_{\substack{\text{przyrost kosztów} \\ \text{gdy produkcja} \\ \text{wzrasta o 1 szt.}}} \approx \underbrace{K'(x)}_{\substack{\text{koszt} \\ \text{krańcowy}}}$$

Podobnie rozpatrując

popyt jako funkcję ceny można określić **cenowy popyt krańcowy**,

popyt jako funkcję dochodu można określić **dochodowy popyt krańcowy**,

poaż jako funkcję ceny można określić **poaż krańcowy**,

zysk jako funkcję ceny można określić **cenowy zysk krańcowy**,

zysk jako funkcję wielkości produkcji można określić **produkcyjny zysk krańcowy**,

itd.

Przykład.

x - wielkość produkcji,

całkowity koszt produkcji $K(x) = 1000x - x^2 + 0,001x^3$,

Wtedy koszt krańcowy wynosi

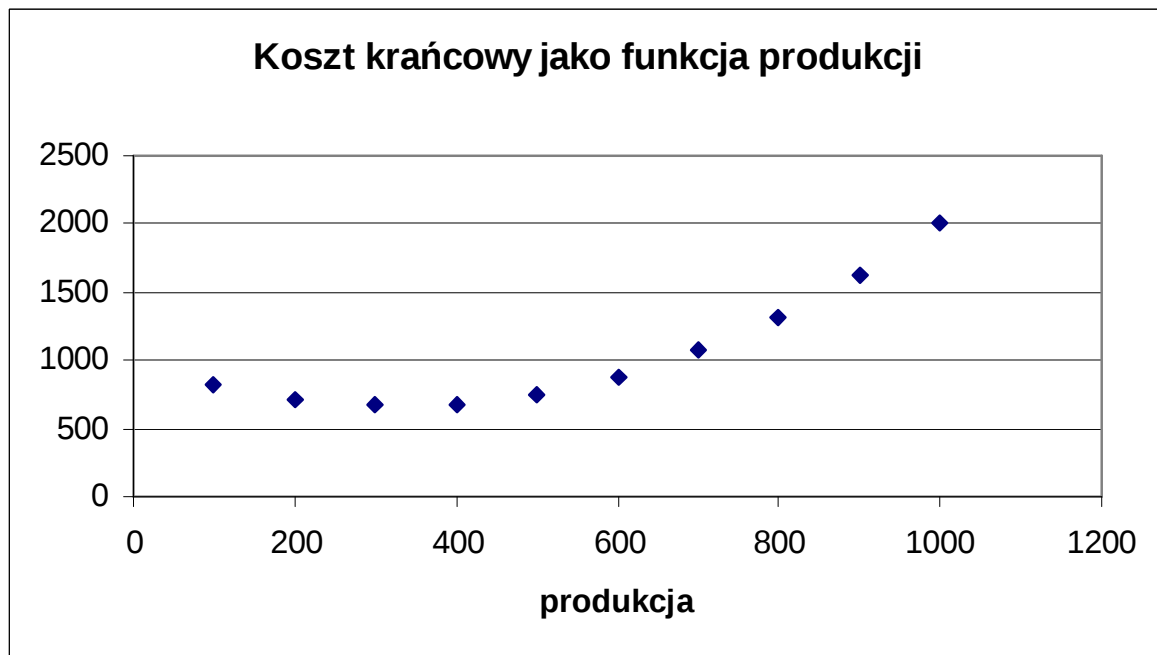
$$K'(x) = 1000 - 2x + 0,003x^2$$

Natomiast przyrost kosztów produkcji wynosi

$$\Delta K = K(x+1) - K(x) = (1000(x+1) - (x+1)^2 + 0,001(x+1)^3) - (1000x - x^2 + 0,001x^3) = 999 - 2x + 0,001(x^2 + x + 1)$$

Obliczmy obie wielkości dla wybranych wartości x :

x	K'	Δk	Błąd wzgl.
100	830	829,301	0,08%
200	720	719,601	0,06%
300	670	669,901	0,01%
400	680	680,201	0,03%
500	750	750,501	0,07%
600	880	880,801	0,09%
700	1070	1071,101	0,10%
800	1320	1321,401	0,11%
900	1630	1631,701	0,10%
1000	2000	2002,001	0,10%

**Wniosek.**

Koszt wyprodukowania dodatkowej sztuki maleje, gdy wielkość produkcji nie przekracza ok. 300 sztuk, potem zaczyna rosnąć i dodatkowa produkcja staje się coraz mniej opłacalna.

Elastyczność.

Niech $x > 0$, $f(x) > 0$. Elastyczność funkcji f w punkcie x to liczba:

$$E_x f = \frac{x f'(x)}{f(x)}$$

interpretacja:

p - procent o jaki zmienia się argument wyjściowy x,

q - procent o jaki zmienia się wartość funkcji na skutek zmiany argumentu wyjściowego,

wtedy $q \approx E_x f \cdot p$

uzasadnienie

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h \quad / : f(x)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \approx \frac{f'(x) \cdot h}{f(x)}$$

$$\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}}_{=q/100} \approx \underbrace{\frac{x \cdot f'(x) \cdot h}{f(x) \cdot x}}_{\substack{=E_x f \\ =p/100}}$$

w szczególności jeśli $p = 1\%$ to

$$q \approx E_x f$$

zatem **elastyczność funkcji w punkcie x jest w przybliżeniu równa procentowej zmianie wartości tej funkcji na skutek zmiany argumentu o 1% jego wartości.**

Przykład.

x - cena,

$p(x) = 60 - 2x$ $x \in (0, 30)$ funkcja popytu wtedy

$$E_x p = \frac{x \cdot (-2)}{60 - 2x} = \frac{-x}{30 - x}$$

np. dla $x = 10$ $E_{10} p = \frac{-10}{30 - 10} = -0,5$

czyli jeśli cena wynosi 10 i wzrośnie o 1% (tzn. do 10,1) to popyt **spadnie** o 0,5%.

Zatem ten popyt **nie jest elastyczny** (wartość bezwzględna elastyczności jest mniejsza od 1).

Natomiast jeśli cena wzrośnie od 10 do 11 (tzn. o 10%) to popyt spadnie o 5%.

ZASTOSOWANIE POCHODNEJ

Reguła de l'Hospitala.

Twierdzenie.

Niech f, g - różniczkowalne w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 oraz

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

2) istnieje skończona lub niewłaściwa granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

wtedy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Uwaga.

Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w nieskończonościach.

Uwaga.

Powyższe twierdzenie stosuje się tylko w przypadku symboli nieoznaczonych $\left[\frac{0}{0} \right]$ i $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^7 + 2x^5 + 64}{x^6 - 64} \left\{ \frac{0}{0} \right\}^H = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-7x^6 + 10x^4}{6x^5} = -1,5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}^H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}^H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}^H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}^H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}^H = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = e^0 = 1$$

Monotoniczność funkcji.

Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$ to $f(x)$ jest **rosnąca** w przedziale (a, b) ,

Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$ to $f(x)$ jest **malejąca** w przedziale (a, b) ,

Jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$ to $f(x)$ jest **stała** w przedziale (a, b) ,

Ekstremum funkcji.

Funkcja f ma w x_0 **maksimum** jeśli w pewnym otoczeniu tego punktu $f(x) < f(x_0)$ ($x \neq x_0$).

Funkcja f ma w x_0 **minimum** jeśli w pewnym otoczeniu tego punktu $f(x) > f(x_0)$ ($x \neq x_0$).

Ekstremum = maksimum lub minimum.

Ekstremum nie musi pokrywać się z wartością największą (najmniejszą) funkcji w przedziale.

Warunek konieczny ekstremum.

Jeśli funkcja f ma w x_0 ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna to

$$f'(x_0) = 0$$

Uwaga.

1) odwrotne twierdzenie nie zachodzi (np. $y = x^3$),

2) funkcja która nie jest różniczkowalna może mieć ekstremum (np. $y = |x|$),

Warunek dostateczny ekstremum.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Jeśli f jest :

- ciągła w x_0
- rosnąca (malejąca) w lewostronnym sąsiedztwie x_0
- malejąca (rosnąca) w prawostronnym sąsiedztwie x_0

wtedy f ma w x_0 maksimum (minimum).

Warunek dostateczny ekstremum funkcji różniczkowalnej.

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		max	

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		min	

Przykład.

Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = e^{-x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$, funkcja f jest parzysta.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

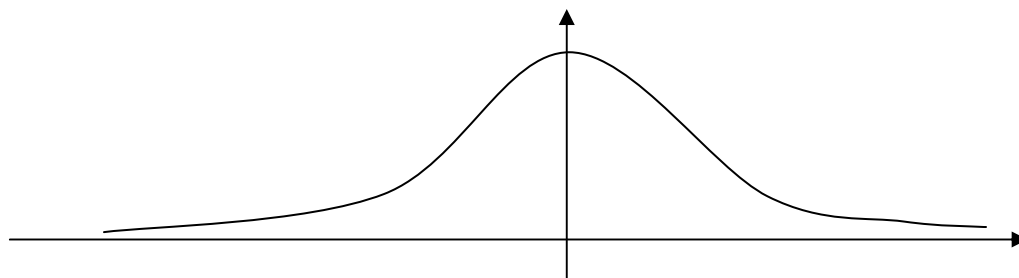
x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		max $f_{\max} = f(0) = 1$	

Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$

oraz

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$

Zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną.



Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji ciągłej w przedziale domkniętym $[a, b]$:

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ osiąga wartość największą i wartość najmniejszą. Wartości te mogą być przyjmowane przez funkcję f jedynie na końcach przedziału lub w takich punktach przedziału (a, b) w których pochodna $f'(x)$ jest równa zero lub nie istnieje.

Przykład.

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 e^x$ w przedziale $[-3, 3]$.

Rozwiązanie:

Pochodna $f'(x) = x(x+2)e^x$ ma miejsca zerowe $x = 0$ i $x = -2$.

Zatem wartość największa to $\max(f(-3), f(3), f(0), f(-2)) = 9e^3$.

Zatem wartość najmniejsza to $\min(f(-3), f(3), f(0), f(-2)) = 0$.

Twierdzenie (Rolle'a)

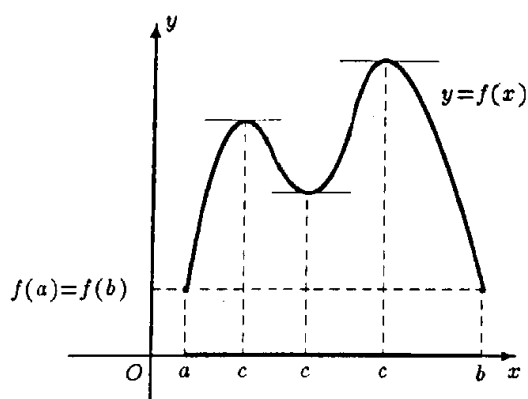
Jeśli

1. funkcja f jest ciągła na $[a, b]$
2. funkcja f ma pochodną na (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Wtedy istnieje $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, różniczkowalnej we wnętrzu tego przedziału i przyjmującej jednakowe wartości na jego końcach istnieje punkt, w którym styczna jest pozioma.



Twierdzenie (Lagrange'a)

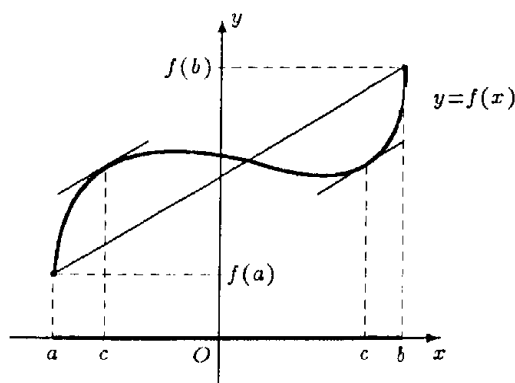
Jeśli

- a) funkcja f jest ciągła na $[a, b]$
- b) funkcja f ma pochodną na (a, b)

Wtedy istnieje $c \in (a, b)$, że $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym i różniczkowalnej na wnętrzu tego przedziału istnieje punkt, w którym styczna do wykresu jest równoległa do siecznej łączącej końce wykresu.



Pochodna rzędu drugiego (druga pochodna)

$$f''(x) = (f')'$$

tzn. pochodna rzędu 2 jest pochodną pochodnej rzędu 1.

Inne oznaczenie: $\frac{d^2 f}{dx^2}$

Przykład:

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - 4x^2 + 3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 8x$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x - 8$$

Uwaga.

Funkcja f jest klasy C^0 w przedziale (a, b) jeśli jest ciągła w tym przedziale.

Funkcja f jest klasy C^1 w przedziale (a, b) jeśli f' istnieje i jest ciągła w tym przedziale.

Funkcja f jest klasy C^2 w przedziale (a, b) jeśli f'' istnieje i jest ciągła w tym przedziale.

Zastosowania f'' **Warunek dostateczny ekstremum.****Twierdzenie.**

Niech f będzie klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) \neq 0$ to f ma w x_0 ekstremum.

Przy czym jest to

minimum gdy $f''(x_0) > 0$

maksimum gdy $f''(x_0) < 0$

Uwaga.

Jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) = 0$ to powyższe twierdzenie nie rozstrzyga o istnieniu w x_0 ekstremum.

Wypukłość funkcji.

Funkcja f różniczkowalna w (a, b) jest **wypukła ku dołowi (wypukła)** w (a, b) jeśli styczna do wykresu w punkcie $(x, f(x))$ dla $a < x < b$ leży poniżej wykresu funkcji.

Funkcja f różniczkowalna w (a, b) jest **wypukła ku górze (wklęsła)** w (a, b) jeśli styczna do wykresu w punkcie $(x, f(x))$ dla $a < x < b$ leży powyżej wykresu funkcji.

Twierdzenie.

Niech f będzie klasy C^2 w (a, b) .

Jeśli $f''(x) < 0$ dla $a < x < b$ to f jest **wypukła ku górze** w (a, b) (**wklęsła**).

Jeśli $f''(x) > 0$ dla $a < x < b$ to f jest **wypukła ku dołowi** w (a, b) (**wypukła**).

Przykład.

Dla funkcji $f(x) = x^2$, mamy $f''(x) = 2 > 0$, zatem jest to funkcja wypukła.

Dla funkcji $f(x) = -x^2$, mamy $f''(x) = -2 < 0$, zatem jest to funkcja wklęsła.

Punkt przegięcia.

Niech f będzie ciągła w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

$(x_0, f(x_0))$ jest **punktem przegięcia** jeśli f jest wypukła ku górze w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 i f jest wypukła ku dołowi w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0 lub odwrotnie.

Twierdzenie.

Niech f będzie klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Jeśli $f''(x_0) = 0$ oraz $f''(x)$ zmienia znak w x_0 to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia.

Przykład.

Dla funkcji $f(x) = x^3$, mamy $f''(x) = 6x$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

oraz $f''(x) < 0$ dla $x < 0$, $f''(x) > 0$ dla $x > 0$

zatem punkt $(0,0)$ jest to funkcja wypukła.

POCHODNA - zadania

1. Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4$	$[6x^2 - 10x]$
b) $f(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 4$	$[1 - x - x^2 + x^3]$
c) $f(x) = x^3(x^2 - 1)^2$	$[3x^2 - 10x^4 + 7x^6]$
d) $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$	$[x^2 e^x]$
e) $f(x) = x \ln x - x$	$[\ln x]$
f) $f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$	$\left[\frac{1}{(x+1)^2} \right]$
g) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$	$\left[\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \right]$
h) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$	$\left[\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \right]$
i) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$	$\left[\frac{7}{8} x^{\frac{1}{8}} \right]$

2. Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$	$\left[\frac{1}{\sqrt{2x+3}} \right]$
b) $f(x) = \sin^3 x$	$[3\sin^2 x \cos x]$
c) $f(x) = \cos^5 x$	$[-5\cos^4 x \sin x]$
d) $f(x) = \sin 6x$	$[6\cos 6x]$
e) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$	$\left[\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \right]$
f) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\left[\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \right]$
g) $f(x) = \ln \frac{3-x^2}{2-x^2}$	$\left[\frac{2x}{x^4 - 5x^2 + 6} \right]$
h) $f(x) = x^{x^2}$	$[x^{x^2+1}(1+2\ln x)]$

3. Wyznacz ekstrema funkcji:

- | | |
|----------------------------------|--|
| a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ | [brak ekstr.] |
| b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ | $[y_{\max} = y(1) = 4, y_{\min} = y(5) = -28]$ |
| c) $f(x) = (x-4)^4 (x+3)^3$ | $[y_{\max} = y(0) = 4^4 3^3, y_{\min} = y(4) = 0]$ |
| d) $f(x) = x \ln x$ | $[y_{\min} = y(1/e) = -1/e]$ |
| e) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ | [brak ekstr.] |

4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ | dla $x \in \langle -4, 4 \rangle$ | $[f(-4) = -271, f(1) = 4]$ |
| b) $f(x) = x \ln x$ | dla $x \in \langle 1, e \rangle$ | $[f(1) = 0, f(e) = e^2]$ |
| c) $f(x) = 3x - x^3$ | dla $x \in \langle -2, 3 \rangle$ | $[f(3) = -18, f(1) = f(-2) = 2]$ |

5. Oblicz drugą pochodną funkcji:

- | | |
|---|------------------------|
| a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4$ | $[12x - 10]$ |
| b) $f(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 4$ | $[-1 - 4x + 9x^2]$ |
| c) $f(x) = x^3 (x^2 - 1)^2$ | $[6x - 40x^3 + 42x^5]$ |
| d) $f(x) = (x+1)^2 (x-2)$ | $[6x]$ |

6. Wyznacz punkty przegięcia funkcji:

- | | |
|------------------------------|-------------|
| a) $f(x) = x^5$ | $[(0, 0)]$ |
| b) $f(x) = (x+1)^2 (x-2)$ | $[(0, -2)]$ |
| c) $f(x) = (x-4)^5 + 4x + 4$ | $[(4, 20)]$ |

7. Oblicz granice stosując regułę de l'Hospitala:

- | | | | |
|--|---------|---|----------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}$ | $[-12]$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$ | $[0, 6]$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^5}$ | $[0]$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$ | $[0]$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ | $[1]$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 4x}$ | $[0, 5]$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ | $[2]$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ | $[0, 5]$ |

8. Zbadaj funkcje i narysuj ich wykresy:

- | |
|---------------------------------|
| a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ |
| b) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ |

$$c) f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

9. Oblicz elastyczność funkcji:

$$a) f(x) = x^n \quad [n]$$

$$b) f(x) = xe^x \quad [1+x]$$

$$c) f(x) = \ln x \quad \left[\frac{1}{\ln x} \right]$$

$$d) f(x) = e^{-x} \quad [-x]$$

10. Dana jest funkcja podaży: $q(x) = x$ i funkcja popytu: $p(x) = 100/x$, $x > 0$ - cena. Wyznacz elastyczność podaży i popytu dla ceny równowagi (cena przy której popyt jest równy podaży).

Podaj interpretację otrzymanych wyników.

$$[x = 10, 1, -1]$$

POCHODNE CZĄSTKOWE FUNKCJI $f(x, y)$

Funkcja dwóch zmiennych: $(x, y) \rightarrow f(x, y)$

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu (x, y) , $\Delta x, \Delta y \neq 0$ takie że $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ należy do tego otoczenia.

Definicja.

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{pochodna cząstkowa względem } x)$$

inne oznaczenie: $f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

analogicznie

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (\text{pochodna cząstkowa względem } y)$$

inne oznaczenie: $f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

Przykład.

Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = 3xy^2$.

$$f'_x(x, y) = 3y^2; \quad f'_y(x, y) = 6xy$$

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu.

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y \quad f''_{yx} = (f'_y)'_x$$

dwie pierwsze to **pochodne czyste**, dwie ostatnie to **pochodne mieszane**.

Przykład.

Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $f(x, y) = 3xy^2$.

$$f''_{xx} = 0 \quad f''_{yy} = 6x \quad f''_{xy} = 6y \quad f''_{yx} = 6y$$

Ekstremum funkcji.

Funkcja f ma w (x_0, y_0) **maksimum** jeśli w pewnym otoczeniu tego punktu

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad \text{dla } ((x, y) \neq (x_0, y_0)).$$

Funkcja f ma w (x_0, y_0) **minimum** jeśli w pewnym otoczeniu tego punktu

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad \text{dla } ((x, y) \neq (x_0, y_0)).$$

Warunek konieczny ekstremum.

Jeśli funkcja f ma w (x_0, y_0) ekstremum i istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe to

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Warunek dostateczny ekstremum.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

Jeśli f ma w pewnym otoczeniu ciągle pochodne cząstkowe rzędu 2 oraz

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{i} \quad Wf(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

wtedy f ma w (x_0, y_0) ekstremum.

Jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ to jest minimum, jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ to jest maksimum,

Uwaga (warunek wykluczający ekstremum).

Jeśli $Wf(x_0, y_0) < 0$ to w punkcie (x_0, y_0) nie ma ekstremum.

Uwaga.

$$Wf(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} =$$

$$= f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{yx}(x_0, y_0) \cdot f''_{xy}(x_0, y_0)$$

Uwaga.

Jeśli pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe to $f''_{yx} = f''_{xy}$.

Przykład.

Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y) = 6x^2 - 12xy + 2y^3$.

$$f'_x(x, y) = 12x - 12y$$

$$f'_y(x, y) = -12x + 6y^2$$

$$f''_{xx} = 12$$

$$f''_{yy} = 12y$$

$$f''_{xy} = -12$$

$$f''_{yx} = -12$$

Punkty krytyczne: $(0, 0)$; $(2, 2)$.

$Wf(0, 0) = -144 < 0$ zatem w $(0, 0)$ nie ma ekstremum.

$Wf(2, 2) = 144 > 0$ zatem w $(2, 2)$ jest ekstremum. Ponieważ $f''_{xx} > 0$ więc jest to minimum.

Uwaga

Za pomocą pochodnych cząstkowych można zdefiniować elastyczności cząstkowe.

POCHODNE CZĄSTKOWE- zadania

1. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

a) $f(x, y) = 2x^3y - 5x^2y^2 - 4$ $[f'_x(x, y) = 6x^2y - 10xy^2, f'_y(x, y) = 2x^3 - 10x^2y]$

b) $f(x, y) = y \ln x - x$ $\left[f'_x(x, y) = \frac{y}{x} - 1, f'_y(x, y) = \ln x \right]$

c) $f(x, y) = x^2y$ $[f'_x(x, y) = 2xy, f'_y(x, y) = x^2]$

2. Wyznaczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

a) $f(x, y) = 2x^3y - 5x^2y^2 - 4$
 $[f''_{xx}(x, y) = 12xy - 10y^2, f''_{yy}(x, y) = -10x^2, f''_{xy}(x, y) = 6x^2 - 20x^2]$

b) $f(x, y) = y \ln x - x$
 $\left[f''_{xx}(x, y) = -\frac{y}{x^2}, f''_{yy}(x, y) = 0, f''_{xy}(x, y) = \frac{1}{x} \right]$

c) $f(x, y) = x^2y$
 $[f''_{xx}(x, y) = 2y, f''_{yy}(x, y) = 0, f''_{xy}(x, y) = 2x]$

3. Wyznaczyć ekstrema funkcji:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $[f_{\min} = f(1, 1) = -1]$

b) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $x, y > 0$ $[f_{\min} = f(5, 2) = 30]$

UZUPEŁNIENIE - FUNKCJE

Definicja

Niech zbiory $X, Y \subset \mathbb{R}$ będą niepuste. **Funkcją** określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy przez $f : X \rightarrow Y$. Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja

Niech $f : X \rightarrow Y$. Wtedy zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji f i oznaczamy przez D_f , a zbiór

$$\{f(x) \in Y : x \in D_f\}$$

nazywamy **zbiorem wartości funkcji** f i oznaczamy przez W_f . Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór elementów z $\mathbb{R}$, dla których wzór ten ma sens liczbowy, nazywamy **dziedzina naturalną** funkcji.

Definicja

Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X, y = f(x)\}.$$

Podzbiór płaszczyzny xOy jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x , gdy każda prosta pionowa przecina go w co najwyżej jednym punkcie.

Definicja

Funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y , gdy

$$W_f = Y,$$

Definicja

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest **parzysta**, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$(-x \in X \text{ oraz } f(-x) = f(x)).$$

Funkcja jest parzysta, gdy oś Oy jest osią symetrii jej wykresu.

Definicja

Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest **nieparzysta**, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$(-x \in X \text{ oraz } f(-x) = -f(x)).$$

Funkcja jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.

Definicja

Funkcja f jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje stała $M > 0$, że dla każdego $x \in A$ zachodzi

$$|f(x)| \leq M.$$

Funkcja jest ograniczona, gdy jej wykres mieści się między dwiema prostymi poziomymi.

Funkcje monotoniczne

Funkcja f jest **rosnąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))].$$

Funkcja f jest **malejąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))].$$

Funkcja f jest **niemalejąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))].$$

Funkcja f jest **nierosnąca** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))].$$

Funkcja f jest **monotoniczna** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli jest rosnąca lub malejąca lub nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze.

Definicja

Niech zbiory $X, Y, Z, W \subset R$ będą niepuste, przy czym $Y \subset Z$ oraz niech $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow W$. **Złożeniem funkcji** g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \rightarrow W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ dla } x \in X.$$

Podobnie określa się złożenie większej liczby funkcji. Składanie funkcji nie jest przemienne.

Definicja

Funkcja f jest **różnowartościowa** na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))].$$

Definicja równoważna

dla każdego $x_1, x_2 \in A$

$$[(x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2))].$$

Jeżeli funkcja jest rosnąca albo malejąca na zbiorze A , to jest różnowartościowa na tym zbiorze.

Definicja

Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa na dziedzinie. Funkcją odwrotną do funkcji f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \rightarrow X$ określoną przez warunek:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x), \text{ gdzie } x \in X, y \in Y.$$

Wykres funkcji f^{-1} otrzymujemy z wykresu funkcji f odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$.

Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest funkcją rosnącą.

Funkcja odwrotna do funkcji malejącej jest funkcją malejącą.

Uwaga

Dla każdego $x \in X$ zachodzi $f^{-1}(f(x)) = x$

oraz

Dla każdego $y \in Y$ zachodzi $f(f^{-1}(y)) = y$.

Funkcje elementarne

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne oraz cyklometryczne. Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji, nazywamy funkcjami elementarnymi.

Wartością bezwzględną (modułem) nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Jest to funkcja elementarna, bo $|x| = \sqrt{x^2}$ dla każdego $x \in R$.

Wielomianem nazywamy funkcję $W : R \rightarrow R$ określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n \in N \cup \{0\}$, $a_i \in R$ dla $0 \leq i \leq n$ oraz $a_n \neq 0$.

Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu W i oznaczamy przez $\text{st}W$ lub $\text{deg}W$.

Funkcję, którą można zapisać w postaci ilorazu dwóch wielomianów nazywamy **funkcją wymierną**.

Uwaga.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \quad a > 0, a \neq 1 \text{ jest podstawą logarytmu}, \quad x > 0.$$

Logarytm przy podstawie e z liczby x nazywamy **logarytmem naturalnym** i oznaczamy przez $\ln x$;

$$\ln x = \log_e x.$$

Logarytm przy podstawie 10 z liczby x nazywamy **logarytmem dziesiętnym** i oznaczamy przez $\lg x$;

$$\lg x = \log_{10} x.$$

Uwaga.

Funkcję wykładniczą przy podstawie e oznaczamy niekiedy przez $\exp$;

$$\exp x = e^x.$$

MATEMATYKA I - zadania powtórzeniowe.

1. Oblicz: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n - 1})$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{4n-1}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n+1}$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2})$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + 3n + 3^n}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^3}}{3n\sqrt{n}}$

2. Zbadaj zbieżność szeregu: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \dots + n}{n^5}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \dots + n}{n^3}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^2 + n}{2 + n^3}$

3. Oblicz: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 8}{e^{2x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{2}}{\sin^2 x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\sqrt{x}}$

4. Wyznacz asymptoty funkcji: a) $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 3}$ b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

5. Wyznacz ekstrema funkcji: a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$

6. Naskicuj wykresy następujących funkcji popytu

a) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ [funkcja Törnquista popytu na dobra podstawowe ($x \geq 0$ dochód)]

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < 5 \\ \frac{2(x-5)}{x+3} & \text{dla } x \geq 5 \end{cases}$ [funkcja Törnquista popytu na dobra wyższego rzędu]

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x < 5 \\ \frac{2x(x-5)}{x+3} & \text{dla } x \geq 5 \end{cases}$ [funkcja Törnquista popytu na dobra luksusowe]

d) $f(x) = \frac{2}{3e^{-4t} + 1}$ [(trend logistyczny) popyt na nowy towar na rynku ($t \geq 0$ czas)]

7. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w danym przedziale:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ $x \in <-5, 3>$ b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $x \in <-1,5; -0,5>$

8. Koszt całkowity wyprodukowania x ton farby wynosi $K(x) = 0,0001x^3 - 0,1x^2 + 40x + 1$. Wiadomo, że cena p zależy będzie od podaży x według zależności: $p(x) = 88 - 0,1x$.

Przy jakiej wielkości produkcji zysk ze sprzedaży farby będzie największy?

9. Wyznaczyć utarg krańcowy i elastyczność, gdy dany jest utarg całkowity

$$U(x) = 3x^2 + 4x + 25 \quad x \in <5, 50>$$

dla liczby jednostek towaru $x = 10$ i $x = 30$ (podać interpretację).

10. Funkcja kosztów przeciętnych jest określona wzorem $k(x) = 0,1x^2 - 3x + 40 + \frac{1}{x}$

Obliczyć elastyczność kosztu przeciętnego i całkowitego dla $x = 10$.

11. Dana jest funkcja podaży: $q(x) = 4x - 1$ i funkcja popytu: $p(x) = 4 - x^2$, $x > 0$ - cena.

Wyznacz elastyczność podaży i popytu dla ceny równowagi (cena przy której popyt jest równy podaży). Podaj interpretację otrzymanych wyników.

12. Dana jest funkcja popytu: $p(x) = 9000 - 30x$ i funkcja kosztów całkowitych:

$$K(p) = 90000 + 30p, \quad x > 0 - \text{cena}; p > 0 - \text{popyt}.$$

Wyznacz funkcję kosztów jako funkcję ceny $K(x)$.

Wyznacz funkcję dochodu $D(x)$.

Narysuj wykresy $K(x)$ i $D(x)$ w jednym układzie współrzędnych, zaznacz obszar zysku i strat.

Wyznacz cenę maksymalizującą dochód.

13. Wyznacz punkty przegięcia funkcji: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

14. Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = e^{-\frac{y}{x}}$.

$$\text{Oblicz } f'_x(1, -1); \quad f'_y(-1, 0)$$

15. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.

$$\text{Oblicz } f''_{xx}(1, 1) \quad f''_{yy}(1, 1) \quad f''_{xy}(1, 1) \quad f''_{yx}(1, 1)$$

16. Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2, \text{ b) } f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 \text{ c) } f(x, y) = e^{2x-y}(2x^2 - y^2).$$

ODPOWIEDZI.

1. a) -2, b) e^{-6} , c) e^2 , d) 0, e) 3, f) $-1/3$.

2. a) rozbieżny, b) zbieżny, c) zbieżny, d) zbieżny, e) rozbieżny, f) rozbieżny.

3. a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) $\frac{-\sqrt{2}}{8}$, f) 1.

4. a) $x = -3$ as. pionowa, $y = 2x - 5$ as. ukośna, b) $y = 0$ as. pozioma.

5. a) $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f(2) = 4/e^2$, b) $f_{\min} = f(\pm 2) = 4$.

7. a) $f_{\min} = f(-5) = -64$, $f_{\max} = f(-2) = 17$, b) $f_{\min} = f(-0,5) = -2,5$, $f_{\max} = f(-1) = -2$.

8. dla $x = 400$

9. dla $x = 10$: 64; 1,86 dla $x = 30$: 184; 1,96.

10. $Ek(10) = -0,5$; $EK(10) = 0,5$.

11. $x = 1$, 1,33; -0,67.

13. (1, 2) - p.p.

$$14. f'_x(x, y) = \frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}} \quad f'_y(x, y) = \frac{-1}{x} e^{-\frac{y}{x}} \quad f'_x(1, -1) = -e; \quad f'_y(-1, 0) = 1.$$

$$15. f''_{xx} = \frac{-4y}{(x+y)^3} \quad f''_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3} \quad f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

$$f''_{xx}(1, 1) = -0,5 \quad f''_{yy}(1, 1) = 0,5 \quad f''_{xy}(1, 1) = f''_{yx}(1, 1) = 0$$

16. a) $f_{\min} = f(0, 0) = 0$, b) $f_{\max} = f(1, 1) = 5$, c) $f_{\min} = f(-2, -2) = 4e^{-2}$.

MATEMATYKA I - TEST

1. Ile wynosi granica: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^{18}}{(1+n^2)^9}$?
 A) 1 B) -1 C) 0 D) $-\infty$
2. Ile wynosi granica: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2}$?
 A) 0 B) 0,5 C) 1 D) - 0,5
3. Dla jakiej wartości k funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{3x} & \text{dla } x \neq 0 \\ k & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$
 jest funkcją ciągłą ?
 A) 2/3 B) 3/2 C) 3 D) 2
4. Dana jest funkcja kosztów $k(x) = (3x+1)^4$. Ile wynosi koszt krańcowy, gdy $x = 1$?
 A) 256 B) 512 C) 768 D) 1024
5. Ile wynosi elastyczność funkcji $f(x) = x^2 + 1$ w punkcie $x = 3$?
 A) 5 B) 5/9 C) 6 D) 9/5
6. Ile wynosi pochodna funkcji $f(x) = \ln \ln x$ w punkcie $x = e$?
 A) 1 B) e C) $1/e$ D) 0
7. Funkcja $f(x)$ ma pochodną $f'(x) = x^2 - 4$. Funkcja ta ma maksimum w punkcie
 A) 2 B) -2 C) nie ma maksimum D) 0
8. Funkcja $f(x) = \frac{1-x^2}{3+x^2}$ ma asymptotę poziomą
 A) $y = 1$ B) $y = -1$ C) $y = 3$ D) $y = 0$
9. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma w przedziale $[-2, -1]$ najmniejszą wartość równą
 A) 1 B) 0,5 C) 0,25 D) 0
10. Dana jest funkcja dwóch zmiennych $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$. Ile wynosi wartość pochodnej cząstkowej f'_x w punkcie $(2, 1)$?
 A) 13 B) 4 C) 11 D) 15

Odpowiedzi: 1A, 2D, 3A, 4C, 5D, 6C, 7B, 8B, 9C, 10A

Literatura:

R.Kozarzewski, W.Matuszewski, J.Zacharski, „Matematyka dla ekonomistów, część 1”,
 J.Gawinecki, „Matematyka dla ekonomistów”,