

Geometria analityczna

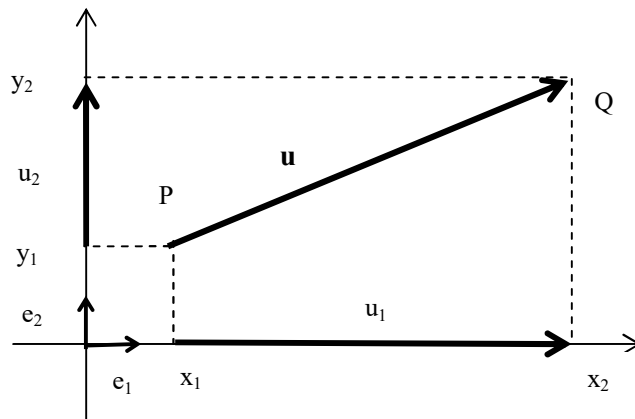
Geometria analityczna w przestrzeni $\mathbb{R}^2$

Rozpatrujemy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych. Punkt $O(0,0)$ jest początkiem tego układu. Będziemy przyjmować **orientację dodatnią** (przeciwną do ruchu wskazówek zegara) układu współrzędnych.

Punkty płaszczyzny utożsamiamy z ich współrzędnymi w tym układzie, czyli parami liczb rzeczywistych, są to więc elementy przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Dowolny punkt P wyznacza wektor swobodny $\overrightarrow{OP}$.

Wektor swobodny $u = \overrightarrow{PQ}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wyznaczony przez punkty $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, ma współrzędne $u_1 = y_1 - x_1$, $u_2 = y_2 - x_2$ i będziemy stosować zapis $u = [u_1, u_2]$.

Wektory $e_1 = [1, 0]$, $e_2 = [0, 1]$ nazywamy **wersorami** (wektorami jednostkowymi).



Odległość między punktami $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, w tej przestrzeni liczymy wg wzoru:

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}$$

Normą (długością) wektora $u = [u_1, u_2]$ nazywamy liczbę:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (u_i)^2}$$

Iloczyn skalarny wektorów $u = [u_1, u_2]$, $v = [v_1, v_2]$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^2 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Dla niezerowych wektorów u, v możemy wyznaczyć cosinus kąta φ między tymi wektorami

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Niezerowy wektor u tworzy z osiami układu współrzędnych kąty φ_1, φ_2 , których cosinusy nazywamy **cosinusami kierunkowymi wektora u** i wyznaczamy na podstawie wzorów

$$\cos \varphi_1 = \frac{u_1}{\|u\|} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{u_2}{\|u\|} = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

Niezerowe wektory u, v są wzajemnie (**prostopadłe**) **ortogonalne** wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, v \rangle = 0$. Ponieważ elementy przestrzeni $\mathbb{R}^2$ można utożsamiać z wektorami swobodnymi, to zbiór wektorów swobodnych z powyższym iloczynem skalarnym jest przestrzenią euklidesową. Wersory $e_1 = [1, 0]$, $e_2 = [0, 1]$ stanowią w niej bazę ortonormalną.

Niezerowe wektory $u = [u_1, u_2]$, $v = [v_1, v_2]$ są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

co jest równoważne warunkowi

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

Przy czym jeśli w mianowniku jest zero to w liczniku też powinno być zero.

Współrzędne punktu $C(c_1, c_2)$ dzielącego odcinek o końcach $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ w stosunku k ,

tzn. $\frac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{CB}\|} = k$ obliczamy z wzorów

$$c_1 = \frac{a_1 + kb_1}{1+k}, \quad c_2 = \frac{a_2 + kb_2}{1+k}$$

Trójkąt o wierzchołkach $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ ma pole

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem punkty A, B, C leżą na jednej prostej gdy

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Prosta w $\mathbb{R}^2$

Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^2$ będziemy traktować jako pary liczb (x, y) i nazywać punktami.

Równanie ogólne prostej.

$$Ax + By + C = 0$$

Uwaga

Wektor $[A, B]$ jest prostopadły do tej prostej i nazywa się, **wektorem normalnym**.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Kąt (ostry) między prostymi $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ wyznaczamy na podstawie cosinusa kąta między ich wektorami normalnymi

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Równanie kierunkowe prostej

$$y = mx + b$$

m - współczynnik kierunkowy

Współczynnik m jest równy tangensowi kąta, który ta prosta tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox.

Dwie proste w postaci kierunkowej $y = m_1x + b_1$ i $y = m_2x + b_2$ są:

a) równoległe gdy

$$m_1 = m_2$$

b) prostopadłe gdy

$$m_1 m_2 = -1$$

Kąt między nimi wyznaczamy na podstawie wzoru na tangens różnicy kątów

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(x_1, y_1), (x_0, y_0)$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Równanie parametryczne prostej

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Powyższa prosta przechodzi przez punkt (x_0, y_0) a wektor $[a, b]$ wyznacza kierunek tej prostej.

Równanie odcinkowe prostej

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$(a, 0), (0, b)$ to punkty przecięcia tej prostej z osiami układu współrzędnych

Zbiory wypukłe w $\mathbb{R}^2$

Zbiór W jest **wypukły** jeśli dla dowolnych $x, y \in W$ i dowolnego $c \in [0, 1]$ również

$$cx + (1 - c)y \in W$$

Zatem zbiór jest wypukły jeśli dla każdych dwóch różnych punktów należących do tego zbioru, należy do niego cały odcinek którego końcami są te punkty.

Część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Przykład

Koło - zbiór wypukły,

Okrąg - nie jest zbiorem wypukłym,

Prosta - zbiór wypukły,

Para przecinających się prostych - nie jest zbiorem wypukłym,

Półpłaszczyzna - zbiór wypukły,

Zauważmy, że zbiór rozwiązań układu nierówności liniowych jest albo zbiorem pustym albo zbiorem wypukłym (ograniczonym lub nieograniczonym).

Powyższa własność wynika stąd, że zbiorem rozwiązań układu nierówności liniowych jest część wspólna półpłaszczyzn będących rozwiązaniami poszczególnych nierówności oraz własności: część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Kwadryki w $\mathbb{R}^2$

Niepusty podzbiór $K \subset \mathbb{R}^2$ jest **kwadryką** jeśli dla pewnej formy kwadratowej $f(x, y)$ określonej na $\mathbb{R}^2$ i liczby rzeczywistej c mamy

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

Jeśli rozpatrywaną formę sprowadzimy do postaci kanonicznej i ewentualnie przenumujemy zmienne, to równania określające kwadryki w $\mathbb{R}^2$ (nazywane w tym przypadku **krzywymi stożkowymi**) można zapisać w postaci

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elipsa
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	punkt
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	zbiór pusty (elipsa urojona)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hiperbola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	przecinające się proste
$y^2 = 2px$	parabola
$\frac{y^2}{b^2} = 1$	proste równoległe
$\frac{y^2}{b^2} = -1$	zbiór pusty
$y^2 = 0$	prosta

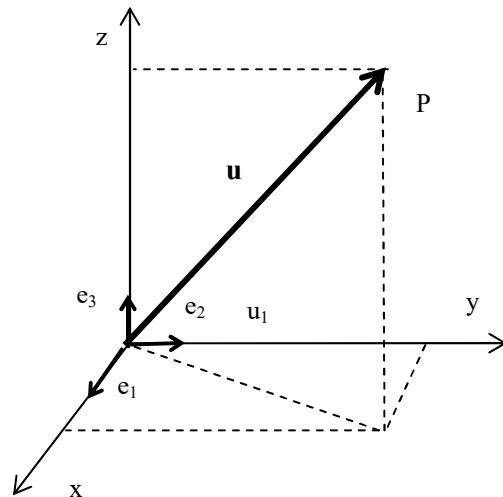
Geometria analityczna w przestrzeni R^3

Rozpatrujemy w przestrzeni prostokątny układ współrzędnych. Punkt $O(0,0,0)$ jest początkiem tego układu. Będziemy przyjmować **orientację prawoskrętną** (zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej) układu współrzędnych.

Punkty przestrzeni utożsamiamy z ich współrzędnymi w tym układzie, czyli trójkami liczb rzeczywistych, są to więc elementy przestrzeni R^3 . Dowolny punkt P wyznacza wektor swobodny $\overrightarrow{OP}$.

Wektor swobodny $u = \overrightarrow{PQ}$ w przestrzeni R^3 wyznaczony przez punkty $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$, ma współrzędne $u_1 = y_1 - x_1$, $u_2 = y_2 - x_2$, $u_3 = y_3 - x_3$ i będziemy stosować zapis $u = [u_1, u_2, u_3]$.

Wektory $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$ nazywamy **wersorami** (wektorami jednostkowymi).



Odległość między punktami $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$, w tej przestrzeni liczymy wg wzoru:

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$$

Normą (długością) wektora $u = [u_1, u_2, u_3]$ nazywamy liczbę:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (u_i)^2}$$

Iloczyn skalarny wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Dla niezerowych wektorów u, v możemy wyznaczyć cosinus kąta φ między tymi wektorami

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Niezerowy wektor u tworzy z osiami układu współrzędnych kąty $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, których cosinusy nazywamy **cosinusami kierunkowymi wektora** u i wyznaczamy na podstawie wzorów

$$\cos \varphi_1 = \frac{u_1}{\|u\|}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{u_2}{\|u\|}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{u_3}{\|u\|}$$

Niezerowe wektory u, v są wzajemnie (**prostopadłe**) **ortogonalne** wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, v \rangle = 0$. Ponieważ elementy przestrzeni R^3 można utożsamiać z wektorami swobodnymi, to zbiór wektorów swobodnych z powyższym iloczynem skalarnym jest przestrzenią euklidesową. Wersory $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$ stanowią w niej bazę ortonormalną.

Iloczyn wektorowy wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$,

$$u \times v = [u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

(pierwszy wiersz to wersory osi).

Iloczyn wektorowy $u \times v$ jest wektorem prostopadłym do wektorów u, v , jego zwrot jest określony przez regułę śruby prawoskrętnej, a jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach u, v . Zatem połowa jego długości jest równa polu trójkąta rozpiętego na tych wektorach.

Iloczyn mieszany wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$, $w = [w_1, w_2, w_3]$

$$(uvw) = (u \times v) \cdot w = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego wektorów u, v, w jest równa objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach. Zatem objętość czworościanu rozpiętego na tych wektorach jest równa

$$V = \left| \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

Niezerowe wektory $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$ są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 1$$

co jest równoważne warunkowi

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Przy czym jeśli w mianowniku jest zero to w liczniku też powinno być zero.

Niezerowe wektory $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$, $w = [w_1, w_2, w_3]$ są **komplanarne** (**współpłaszczyznowe**) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0$$

co oznacza zerowanie się ich iloczynu mieszanego.

Prosta i płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$

Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ będziemy traktować jako trójki liczb (x, y, z) i nazywać punktami.

Równanie ogólne płaszczyzny.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Uwaga

Wektor $[A, B, C]$ jest prostopadły do tej płaszczyzny i nazywa się **wektorem normalnym**.

Kąt (ostry) między płaszczyznami $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ wyznaczamy na podstawie cosinusa kąta między ich wektorami normalnymi

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Odległość punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Korzystając z własności iloczynu mieszanego możemy wyznaczyć **równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch danych nierównoległych wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$**

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Podobnie **równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3)** .

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

Równanie odcinkowe płaszczyzny

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ to punkty przecięcia tej prostej z osiami układu współrzędnych

Równanie kanoniczne prostej. Prosta przechodząca przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ i równoległa do wektora $u = [u_1, u_2, u_3]$ ma równanie

$$\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$

Jeśli przyjmą $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3} = t$, to po przekształceniu otrzymamy **równanie parametryczne prostej**

$$x = x_0 + u_1 t, \quad y = y_0 + u_2 t, \quad z = z_0 + u_3 t$$

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(x_1, y_1, z_1), (x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Ponieważ prosta jest wyznaczona przez dwie nierównoległe płaszczyzny $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, to

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

jest **równaniem krawędziowym prostej**.

Wektor kierunkowy tej prostej jest równy iloczynowi wektorowemu wektorów normalnych rozpatrywanych płaszczyzn.

Odległość punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ od prostej o wektorze kierunkowym $u = [u_1, u_2, u_3]$ i przechodzącej przez punkt $Q(x_1, y_1, z_1)$ wynosi

$$d = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Cosinus kąta między prostą o wektorze kierunkowym $u = [u_1, u_2, u_3]$ a płaszczyzną $Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem

$$d = \frac{|Au_1 + Bu_2 + Cu_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Kwadryki w R^3

Niepusty podzbiór $K \subset R^3$ jest **kwadryką** jeśli dla pewnej formy kwadratowej $f(x, y, z)$ określonej na R^3 i liczby rzeczywistej c mamy

$$K = \{x \in R^3 : f(x, y, z) = c\}$$

Jeśli rozpatrywaną formę sprowadzimy do postaci kanonicznej i ewentualnie przenumeryjemy zmienne, to równania określające kwadryki w R^3 można pogrupować i zapisać w postaci

Typ elipsoidalny

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{elipsoida}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{punkt}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{zbiór pusty (elipsoida urojona)}$$

Typ hiperboidalny

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{hiperboloida}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{stożek}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{hiperboloida dwupowłokowa}$$

Typ paraboloidalno-eliptyczny

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{paraboida eliptyczna}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{walec eliptyczny}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{prosta}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{zbiór pusty}$$

Typ paraboloidalno-hiperboliczny

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{paraboida hiperboliczna}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{walec hiperboliczny}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{przecinające się płaszczyzny}$$

Typ paraboloidalny

$$y^2 = 2px \quad \text{walec paraboliczny}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{różne płaszczyzny równoległe}$$

$$y^2 = 0 \quad \text{płaszczyzna}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{zbiór pusty}$$

Zadania

Zadanie 1

Punkt $C(2; 3)$ jest środkiem odcinka o końcach A, B . Wiedząc, że $B(7; 5)$, wyznaczyć współrzędne punktu A .

(odp. $A(-3; 1)$)

Zadanie 2

Sprawdzić, że trójkąt o wierzchołkach $A(-3; -3), B(-1; 3), C(11; -1)$ jest prostokątny.

Zadanie 3

Niech $u = [1, -2], v = [1, -1]$. Wyznaczyć $w = 2u - v, \|w\|, \langle u, v \rangle$.

Czy wektory u, v są prostopadłe?

Czy wektory u, v są równoległe?

(odp. nie są prostopadłe, nie są równoległe)

Zadanie 4

Wyznaczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(-2; -4), B(2; 8), C(10; 2)$.

(odp. 60)

Zadanie 5

Dane są trzy kolejne wierzchołki równoległoboku $A(11; 4)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 7)$. Wyznaczyć współrzędne czwartego wierzchołka.

(odp. $D(17; 12)$)

Zadanie 6

Sprawdzić, że punkt $S(s_1, s_2)$ przecięcia środkowych trójkąta o wierzchołkach $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ ma współrzędne

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

Zadanie 7

Dany jest punkt $S(1, 1)$ przecięcia środkowych trójkąta o wierzchołkach $A(3, 8)$, $B(10, 2)$, C . Obliczyć współrzędne wierzchołka C .

(odp. $(-10, -7)$)

Zadanie 8

Punkty o współrzędnych $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$ są środkami boków pewnego trójkąta. Ile wynosi pole tego trójkąta?

(odp. 24)

Zadanie 9

Koszt produkcji K jest liniową funkcją wielkości produkcji P

$$K = e + fP$$

e - koszty stałe,

f - współczynnik kosztów, $f > 0$.

Wiedząc, że koszty stałe są równe 100 oraz, że wzrost produkcji o 100 sztuk powoduje wzrost kosztów o 1000 zł, wyznacz funkcję kosztów.

(odp. $K = 100 + 10P$)

Zadanie 10

Prosta przecina osie układu współrzędnych w punktach $(0, -2)$ i $(6, 0)$.

Wyznaczyć równanie

a) odcinkowe, b) ogólne, c) kierunkowe, d) parametryczne tej prostej.

$$(\text{odp. a) } \frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1, \text{ b) } x - 3y - 6 = 0, \text{ c) } y = \frac{1}{3}x - 2, \text{ d) } \begin{cases} x = 6t + 6 \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in R)$$

Zadanie 11

Dana jest prosta $2x - y + 3 = 0$. Sprawdź, które z punktów $A(2, 1)$, $B(-1, -4)$, $C(-1, 1)$, leżą na danej prostej.

(odp. A – nie, B – nie, C – tak)

Zadanie 12

Znaleźć punkty przecięcia prostej $2x - 3y + 6 = 0$ z osiami układu współrzędnych.

(odp. $(-3, 0)$, $(0, 2)$)

Zadanie 13

Prostą o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 4t - 1 \end{cases} \quad t \in R$$

zapisać w postaci ogólnej i kierunkowej.

(odp. $2x + y - 1 = 0$, $y = -2x + 1$)

Zadanie 14

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $(2, 5)$ i $(0, 7)$.

(odp. $x + y - 7 = 0$)

Zadanie 15

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $(-1, 3)$ i $(2, 5)$.

(odp. $2x - 3y + 11 = 0$)

Zadanie 16

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(2, -1)$, równoległej do prostej $2x + 3y + 1 = 0$.

(odp. $2x + 3y - 1 = 0$)

Zadanie 17

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(2, 4)$, prostopadłej do prostej $2x + y - 5 = 0$.

(odp. $x - 2y + 6 = 0$)

Zadanie 18

Wyznacz kąt ostry między prostymi $y = -3x + 7$, $y = 2x + 1$.

(odp. $\pi/4$)

Zadanie 19

Sprawdź, że proste $2x + y - 1 = 0$, $-10x - 5y + 12 = 0$ są równoległe.

Zadanie 20

Sprawdź, że proste $2x + 4y - 1 = 0$, $-4x + 2y + 12 = 0$ są prostopadłe.

Zadanie 21

Wyznacz odległość punktu $A(1, 2)$ od prostej $20x - 21y - 7 = 0$.

(odp. 1)

Zadanie 22

Wyznacz punkt symetryczny do punktu $A(-2, 9)$ względem prostej $2x - 3y + 18 = 0$.

(odp. $(2, 3)$)

Zadanie 23

Wyznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność:

a) $x_1 + 2x_2 \leq 2$;

b) $-x_1 + x_2 > 0,5$;

Zauważ, że zbiorem rozwiązań nierówności liniowej jest zawsze zbiór wypukły - półpłaszczyzna (z brzegiem lub bez brzegu).

Zadanie 24

Rozwiąż graficznie układ nierówności:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 \geq -2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

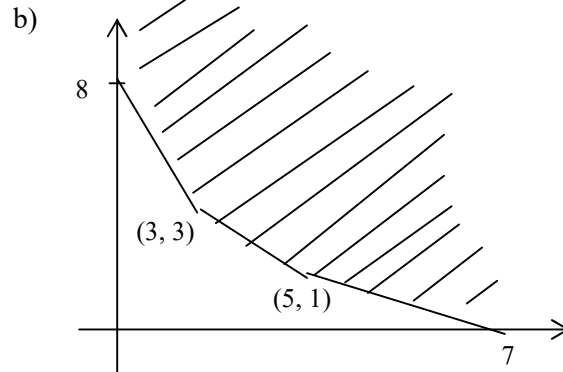
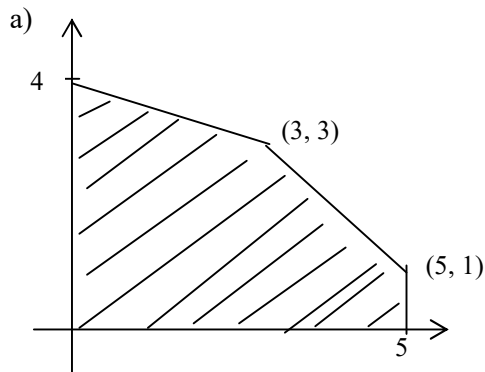
c)
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

W przypadku gdy zbiór rozwiązań układu nierówności jest niepusty podaj przykład punktu należącego do zbioru rozwiązań i wyznacz wierzchołki zbioru rozwiązań.

Zadanie 25

Dany jest zbiór wypukły:



Wyznacz układ nierówności liniowych, którego rozwiązaniem jest ten zbiór.

Zadanie 26

Niech $u = [-1, 0, 3]$, $v = [0, 2, 1]$. Oblicz iloczyn skalarny tych wektorów.

Czy wektory u , v są prostopadłe?

(odp. 3, nie są prostopadłe)

Zadanie 27

Dla jakiej wartości $c \in \mathbb{R}$ wektory $u = [c, 3, 4]$ i $v = [4, c, -7]$ są prostopadłe.

(odp. $c = 4$)

Zadanie 28

Dla jakiej wartości $c \in \mathbb{R}$ wektory $u = [-1, 2, -2]$ i $v = [c, -4, 4]$ są równoległe.

(odp. $c = -2$)

Zadanie 29

Niech $u = [2, 3, 5]$, $v = [1, 2, 1]$. Oblicz iloczyn wektorowy tych wektorów.

(odp. $[-7, 3, 1]$)

Zadanie 30

Niech $u = [6, 3, -2]$, $v = [3, -2, 6]$. Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach.

(odp. 49)

Zadanie 31

Wyznaczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

(odp. $2\sqrt{6}$)

Zadanie 32

Niech $u = [2, -1, -1]$, $v = [1, 3, -1]$, $w = [1, 1, 4]$. Oblicz iloczyn mieszany tych wektorów.

(odp. 33)

Zadanie 33

Sprawdzić, że dla dowolnych wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$, $w = [w_1, w_2, w_3]$; wektory $u + v$, $v + w$, $w - u$ są komplanarne.

Zadanie 34

Sprawdzić, że wektory $u = [2, 5, 7]$, $v = [1, 1, -1]$, $w = [1, 2, 2]$ są komplanarne.

Zadanie 35

Wyznaczyć objętość czworoscianu o wierzchołkach $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$.

(odp. $7/6$)

Zadanie 36

Wyznaczyć odległość punktu $A(3, 5, -8)$ od płaszczyzny $6x - 3y + 2z - 1 = 0$.

(odp. 2)

Zadanie 37

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(2, 3, 5)$, prostopadłej do wektora $u = [4, 3, 2]$.

(odp. $4x + 3y + 2z - 27 = 0$)

Zadanie 38

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(2, 3, -1)$, równoległej do płaszczyzny $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

(odp. $5x - 3y + 2z + 1 = 0$)

Zadanie 39

Wyznacz punkt przecięcia płaszczyzny $2x + 3y + z - 1 = 0$ prostą $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$.

(odp. $(2, -3, 6)$)

Zadanie 40

Wyznacz rzut punktu $A(2, 3, -6)$ na płaszczyznę $x + 2y + z + 4 = 0$.

(odp. $(1, 1, -7)$)

Zadanie 41

Wyznacz punkt symetryczny do punktu $A(1, 1, 1)$ względem płaszczyzny $x + y - 2z - 6 = 0$.

(odp. $(3, 3, -3)$)

Zadanie 42

Wyznacz punkt symetryczny do punktu $A(1, 1, 1)$ względem prostej $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

(odp. $(9/7, -4/7, -22/7)$)

Zadanie 43

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(5, 3, 4)$, równoległej do wektora $u = [2, 5, -8]$.

(odp. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-8}$)

Zadanie 44

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(2, 3, 1)$, prostopadłej do wektorów $u = [2, 3, 1]$, $v = [3, 1, 2]$.

(odp. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-7}$)

Zadanie 45

Wyznacz kąt między prostymi $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$, $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$.

(odp. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$)

Zadanie 46

Wykazać, że proste $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$, $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$ są prostopadłe.