

ALGEBRA MACIERZY. UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH.

MACIERZE

Macierzą o wymiarach $m \times n$ (m na n) nazywamy prostokątną tablicę, której elementami jest $m \cdot n$ liczb rzeczywistych, mającą m wierszy i n kolumn postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑ ↑
kolumny

←
←
←
←
wiersze

Stosujemy zapis $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ lub $A = [a_{ij}]$ lub A

Pierwszy indeks elementu macierzy a_{ij} określa w którym wierszu macierzy jest ten element.

Drugi indeks elementu macierzy a_{ij} określa w której kolumnie macierzy jest ten element.

element
macierzy → a_{ij} ← nr kolumny

nr wiersza ↗ ↘

Macierz której wszystkie elementy są równe 0 nazywamy **macierzą zerową**. Gdy wymiary tej macierzy wynikają z kontekstu lub są nieistotne to stosujemy wtedy uproszczony zapis $A = 0$.

Macierz w której jest tylko jedna kolumna nazywamy **macierzą kolumnową** albo **wektorem**.

Jeśli $m = n$ to macierz nazywamy **macierzą kwadratową** stopnia n .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz kwadratowa stopnia n

Elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ stanowią **przekątną** tej macierzy.

Śladem macierzy kwadratowej A nazywamy sumę elementów jej przekątnej, co zapisujemy

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ jest **diagonalna** jeśli $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, tzn. elementy poza przekątną są równe 0. Stosujemy oznaczenie $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz diagonalna stopnia n

Macierz diagonalna jest **jednostkowa** jeśli $a_{ii} = 1$ dla $i = 1, \dots, n$, tzn. wszystkie elementy na przekątnej są równe 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

macierz jednostkowa stopnia n

Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy I_n lub I (można też spotkać oznaczenie E_n lub E).

Elementy macierzy jednostkowej możemy zapisać za pomocą **symbolu Kroneckera** δ_{ij} ,

gdzie $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}$. Wtedy $I = [\delta_{ij}]$.

Macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]$ jest (**górna**) **trójkątna** jeśli $a_{ij} = 0$ dla $i > j$, tzn. elementy pod przekątną są równe 0. Analogicznie jeśli $a_{ij} = 0$ dla $i < j$, tzn. elementy nad przekątną są równe 0 to macierz jest (**dolna**) **trójkątna**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz trójkątna (górna)

macierz trójkątna (dolna)

Zapis macierzowy

Przykład (wektor produkcji)

Piekarnia wypieka: chleb staropolski, chleb baltonowski, bułki paryskie i kajzerki.

Pewnego dnia na I zmianie wypieczono:

- 500 szt. chleba staropolskiego,
- 1200 szt. chleba baltonowskiego,
- 500 szt. bułek paryskich,
- 2500 szt. kajzerek.

Wielkości te możemy zapisać wektorowo.

$$w_I = \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \\ 500 \\ 2500 \end{bmatrix}$$

i nazywać wektorem produkcji (istotna jest informacja jaka jest interpretacja poszczególnych składowych).

W tej samej piekarni na II zmianie wektor produkcji wyglądał następująco:

$$w_{II} = \begin{bmatrix} 200 \\ 800 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

(0 na trzeciej składowej oznacza, że na II zmianie nie wypiekano bułek paryskich)

Natomiast dla III zmiany wektor produkcji był następujący:

$$w_{III} = \begin{bmatrix} 300 \\ 2000 \\ 800 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że suma tych wektorów

$$w = w_I + w_{II} + w_{III} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 4000 \\ 1300 \\ 8600 \end{bmatrix}$$

jest wektorem produkcji całodobowej.

Przykład (macierz produkcji)

I, II, III – oddziały produkcji danej firmy,

A, B, C, D – produkty produkowane przez te oddziały w ciągu jednej zmiany.

Niech

$$w_I = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix}, \quad w_{II} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{bmatrix}, \quad w_{III} = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{43} \end{bmatrix} - \text{wektory produkcji poszczególnych oddziałów}$$

Jeśli wektory te zestawimy w jedną macierz to otrzymamy macierz produkcji całej firmy

$$M = [x_{ij}]_{4 \times 3}$$

x_{ij} – ilość i - tego produktu wytwarzanego przez j - ty oddział,

np.

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 20 & 25 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \leftarrow A \\ \leftarrow B \\ \leftarrow C \\ \leftarrow D \end{array} \right\} \text{Produkt}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_I \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{II} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{III}$

Oddz.

Uwaga. Np. $x_{12} = 0$ - oznacza, że II oddział nie wytworzył ani jednej jednostki produktu A.

Macierz produkcji dobowej jest równa sumie macierzy produkcji dla poszczególnych zmian.

Przykład (macierz jednostkowych kosztów transportu)

Dwie cementownie I, II, zaopatrują w cement cztery wytwórnie betonu.

Jednostkowe koszty transportu (koszt [zł] przewozu 1 tony) do poszczególnych odbiorców dla cementowni I wynoszą odpowiednio 3, 5, 8, 4 a dla cementowni II: 6, 4, 10, 2.

Koszty te możemy zapisać w postaci macierzy kosztów jednostkowych:

$$k = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{wytwórnie} \quad \text{betonu (odbiorcy)}}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix}} \right\} \text{cementownie (dostawcy)}$$

Działania na macierzach

Mnożenie macierzy przez liczbę

Niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, c – liczba rzeczywista.

Wtedy $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$ (mnożymy przez c wszystkie elementy tej macierzy).

Przykład

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponowanie macierzy

Niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$,

wtedy $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ (wiersze macierzy A zapisujemy jako kolumny macierzy A^T).

Zauważmy, że $(A^T)^T = A$.

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Dodawanie (odejmowanie) macierzy

Niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

(rozmiary macierzy muszą być zgodne),

wtedy $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$

(dodajemy (odejmujemy) odpowiednie elementy macierzy).

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+4 & 0+0 \\ -1-2 & 3+6 & 1+2 \\ 0+0 & -2-4 & 0+0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład

Macierze produkcji dla poszczególnych trzech zmian firmy są następujące:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 20 & 25 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 20 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że oddział II nie pracuje na trzeciej zmianie, a oddział III nie pracuje na drugiej i trzeciej zmianie

Wyznamy macierz M produkcji tygodniowej tej firmy (zakładamy, że w ciągu pięciu dni roboczych produkcja jest identyczna).

$$M = 5 \cdot (M_1 + M_2 + M_3) =$$

$$= 5 \cdot \begin{bmatrix} 25 & 0 & 5 \\ 50 & 45 & 0 \\ 0 & 15 & 5 \\ 40 & 5 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 25 \\ 250 & 225 & 0 \\ 0 & 75 & 25 \\ 200 & 25 & 100 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Niech $A = [a_{ik}]_{m \times r}$, $B = [b_{kj}]_{r \times n}$

(liczba kolumn pierwszej macierzy musi być równa liczbie wierszy drugiej macierzy),
wtedy

$$A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^r a_{ik} \cdot b_{kj} \right]_{m \times n}$$

(mnożymy wiersze pierwszej macierzy przez kolumny drugiej macierzy).

Niekiedy wygodnie jest zapisywać mnożenie macierzy w następujący sposób (**schemat Falka**):

Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznamy iloczyn tych macierzy (mnożenie to jest wykonalne bowiem macierz A ma 4 kolumny a macierz B ma 4 wiersze).

Stosujemy zapis (**schemat Falka**):

poszczególne elementy macierzy AB otrzymujemy mnożąc odpowiadający temu elementowi wiersz macierzy A przez znajdującą się nad nim kolumnę macierzy B .

np. $(-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 9$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -1 \\ & 2 & 1 & 3 & B \\ & 0 & -1 & 0 & \leftarrow \\ & -2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 4 & -8 & -2 & 9 & \leftarrow \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 & \leftarrow AB \\ A \uparrow & & & & & & & \end{array}$$

Przykład

Firma produkuje wyroby A, B stosując trzy rodzaje surowców S_1, S_2, S_3 .

Normę zużycia surowców można zapisać w tabeli np.

Surowiec (kg)	Wyrób A	Wyrób B
S_1	1	0
S_2	2	3
S_3	4	2

lub w postaci macierzy

$$N = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{wyroby}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}} \right\} \text{surowce}$$

Znając wektor planowanej produkcji dobowej np. $w = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$

możemy wyznaczyć (mnożąc macierz norm zużycia surowców przez wektor produkcji) wektor zużycia surowców.

$$Z = N \cdot w = \begin{bmatrix} 100 \\ 800 \\ 800 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 100 \\ 800 \\ 800 \end{bmatrix}} \right\} \text{ zużycie poszczególnych surowców}$$

Oznacza to, że aby zrealizować zaplanowaną produkcję należy codziennie zapewnić 100 kg surowca S_1 , 800 kg surowca S_2 i 800 kg surowca S_3 .

Potęga macierzy

Jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n to $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k$.

Własności

- a) mnożenie macierzy jest łączne, tzn. $A(BC) = (AB)C$, dlatego zapis ABC jest jednoznaczny,
- b) mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania, tzn.
 $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$,
- c) mnożenie macierzy nie jest przemienne,
- d) $AI = A$, $IA = A$, o ile wymiary macierzy umożliwiają mnożenie,
- e) $(AB)^T = B^T A^T$,
- f) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$, (A, B – macierze kwadratowe stopnia n).

Obliczanie wyznacznika macierzy

Wyznacznik obliczamy tylko dla macierzy kwadratowych (jest to liczba przyporządkowana macierzy kwadratowej).

Wyznaczniki macierzy niskiego stopnia można liczyć następująco:

Dla macierzy stopnia 1: $\det[a] = a$

Dla macierzy stopnia 2: $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

Dla macierzy stopnia 3 (**metoda Sarrusa**): $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix} =$

$$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Dla macierzy dowolnego stopnia (>1) wyznacznik można rozwijać (twierdzenie Laplace'a) względem wybranego wiersza lub wybranej kolumny (najlepiej wybrać wiersz lub kolumnę z największą liczbą zer).

Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} jest równe $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ gdzie A_{ij} jest macierzą otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i – tego wiersza oraz j – tej kolumny.

Uwaga

Jeśli w dowolnej macierzy A wybierzemy dowolne k wierszy i k kolumn to elementy znajdujące się na ich przecięciu tworzą macierz kwadratową stopnia k . Wyznacznik tej macierzy nazywamy minorem stopnia k . Zatem $\det A_{ij}$ jest minorem stopnia $n - 1$.

Twierdzenie Laplace'a

Wyznacznik macierzy A jest równy sumie iloczynów elementów dowolnego wiersza (kolumny) tej macierzy przez ich dopełnienia algebraiczne, tj.

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} \det A_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in}$$

dla i – tego wiersza

$$\det A = a_{1j}(-1)^{1+j} \det A_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j} \det A_{2j} + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j} \det A_{nj} \quad \text{dla } j \text{ – tej kolumny}$$

Twierdzenie Laplace'a pozwala sprowadzić obliczanie wyznacznika macierzy stopnia n do obliczania wyznaczników macierzy stopnia $n - 1$, np. rozwinięcie wyznacznika czwartego stopnia względem pierwszego wiersza ma postać

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ rozwijając go względem drugiego wiersza.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

Dwa pierwsze składniki rozwinięcia zostały pominięte bo są równe zero.

Uwaga

Jeśli wyznacznik macierzy jest równy zero to macierz nazywamy **osobliwą**.

Jeśli wyznacznik macierzy jest różny od zera to macierz jest **niesobliwa**.

Własności wyznacznika

a) $\det A = \det A^T$

b) jeśli macierz A jest stopnia n , to dla dowolnej stałej a mamy $\det(aA) = a^n \det A$

c) $\det AB = \det A \det B$

- d) dla macierzy nieosobliwej A mamy $\det A^T A > 0$,
- e) jeśli w macierzy A jest wiersz (kolumna) złożony z samych zer to $\det A = 0$,
- f) jeśli w macierzy A są jednakowe wiersze (kolumny) to $\det A = 0$,
- g) jeśli wiersz (kolumnę) macierzy A pomnożymy przez dowolną liczbę rzeczywistą to wyznacznik powstałej macierzy będzie równy wyznacznikowi macierzy A pomnożonemu przez tę liczbę,
- h) jeśli w macierzy A zamienimy miejscami dwa wiersze (kolumny) to wyznacznik powstałej macierzy będzie równy $-\det A$,
- i) wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli do pewnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę różną od zera.
- j) wyznacznik macierzy trójkątnej (pod przekątną same zera) jest równy iloczynowi elementów na przekątnej.

Uwaga

- a) operacje na wierszach (kolumnach) o których mowa w punktach g), h), i) nazywamy **operacjami elementarnymi**,
- b) Własność i) pozwala uprościć liczenie wyznacznika macierzy jeśli wykonamy takie operacje na elementach wiersza (kolumny) które wyzerują pewną liczbę elementów.

Przykład

Obliczymy wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ zerując niektóre elementy w trzeciej kolumnie.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} + & + & + \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)^+ & (-3)^+ \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -16 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{1+1}(2) \begin{vmatrix} -7 & -16 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 48$$

(strzałki wskazują, który wiersz jest dodawany (po ewentualnym pomnożeniu przez liczbę) do wskazanego wiersza inny sposób zapisu to np. $I_w + II_w$, $-2 I_w + III_w$).

Wyznaczanie macierzy odwrotnej

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n .

Macierzą odwrotną do macierzy A jest macierz A^{-1} spełniająca warunki:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Gdzie I jest macierzą jednostkową stopnia n .

Własność: tylko dla macierzy nieosobliwych istnieje macierz odwrotna.
Macierz odwrotną można wyznaczyć następująco:

Sposób I (**metoda dopełnień algebraicznych**):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [A_D]^T$$

gdzie A_D jest macierzą dopełnień algebraicznych elementów macierzy A .

Uwaga

W szczególnym przypadku gdy mamy nieosobliwą macierz stopnia 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

to

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Przykład

Wyznamy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zauważmy, że $\det A = 4$ więc A^{-1} istnieje.

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & -0,5 \\ 0 & 0,25 & -0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Sposób II (**metoda przekształceń elementarnych**)

Własność

$A_{n \times n}$ – macierz nieosobliwa, $I_{n \times n}$ – macierz jednostkowa. Jeśli $[I, B]$ otrzymamy za pomocą operacji elementarnych na wierszach macierzy $[A, I]$ to $B = A^{-1}$.

Przykład

Wyznamy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det A = 1$ zatem A jest macierzą nieosobliwą.

A			I			przekształcenie
1	2	3	1	0	0	
0	1	2	0	1	0	
2	1	1	0	0	1	$-2wI + wIII$
1	2	3	1	0	0	$-2wII + wI$
0	1	2	0	1	0	
0	-3	-5	-2	0	1	$3wII + wIII$
1	0	-1	1	-2	0	$wIII + wI$
0	1	2	0	1	0	$-2wIII + wII$
0	0	1	-2	3	1	
1	0	0	-1	1	1	
0	1	0	4	-5	-2	
0	0	1	-2	3	1	
I			A^{-1}			

Zatem
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Własność

- macierzą odwrotną do macierzy jednostkowej jest ta sama macierz tzn. $I^{-1} = I$,
- $(\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}))^{-1} = \text{diag}((a_{11})^{-1}, (a_{22})^{-1}, \dots, (a_{nn})^{-1})$
- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
- $(AB)^{-1} = (B)^{-1}(A)^{-1}$,
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Rząd macierzy

Niech A będzie dowolną macierzą.

Rzędem macierzy A jest stopień największej podmacierzy kwadratowej nieosobliwej otrzymanej z A przez wykreślenie pewnej liczby wierszy i (lub) kolumn czyli maksymalny stopień nieosobliwego minora tej macierzy.

Rząd macierzy będziemy oznaczać rzA lub rA .

Uwaga

- Rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej,
- Rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n ,
- Rząd macierzy A^T jest równy rzędowi macierzy A ,
- Rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy,
- Jeśli macierz kwadratowa jest nieosobliwa to jej rząd jest równy stopniowi tej macierzy,
- Jeśli dowolny wiersz macierzy pomnożymy przez stałą różną od zera i dodamy do innego wiersza to rząd macierzy nie ulegnie zmianie. Jeśli zamienimy dwa wiersze między sobą miejscami to rząd macierzy nie ulegnie zmianie. Podobne operacje można wykonywać na kolumnach macierzy.
- Jeśli wykreślimy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer to rząd nie ulegnie zmianie.

Przykład

Rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ jest równy 2 bo wykreślając kolumny 1, 4 i 5 otrzymamy podmacierz kwadratową stopnia 2 nieosobliwą.

Przykład

Wyznaczymy rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Wykonując elementarne działania na wierszach (patrz własność f) powyższej uwagi) dążymy do uzyskania pod przekątną elementów zerowych.

$$rzA = rz \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Najpierw dodaliśmy I wiersz do III wiersza, następnie II wiersz pomnożyliśmy przez (-1) i dodaliśmy do III wiersza.

MACIERZE - Zadania

Zadanie 1

a) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacz macierz $A^T + 2B - C^T$.

b) Wyznacz macierz X wiedząc, że $(3X)^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

c) Wyznacz macierze (A, C to macierze z punktu a))

1) $A+C$, 2) $4A-3C$, 3) $0,5(A^T)^T$, 4) $(-A-C)^T$, 5) $(A+C)^T$.

$$(\text{odp. a}) \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -4 \\ 0 & -6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ b) } X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

Przyjmując macierz produkcji dobowej (patrz przykład)

$$M = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 25 \\ 250 & 225 & 0 \\ 0 & 75 & 25 \\ 200 & 25 & 100 \end{bmatrix}$$

i wiedząc że wektor cen jednostkowych (tys. zł) dla produktów A, B, C, D ma postać

$$p = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

wykonując mnożenie $W = M^T \cdot p$ wyznacz wektor wartości produkcji.
Który oddział ma najmniejszą wartość produkcji?

$$(\text{odp. } W = \begin{bmatrix} 2100 \\ 1275 \\ 375 \end{bmatrix}, \text{ najmniejszą wartość produkcji ma oddział trzeci})$$

Zadanie 3

a) Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ wyznacz iloczyny $A \cdot B$ i $B \cdot A$,

b) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, wyznacz $A \cdot B$, $B \cdot A$, $(A \cdot B)^T$ i $B^T \cdot A^T$

c) Wyznacz macierz X jeśli $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T - 3X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$(\text{odp. a) } A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}; (A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix})$$

Zauważ, że mnożenie macierzy nie jest przemienne.
Zauważ, że spełniona jest własność $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Zadanie 3-1

a) Niech $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$, wyznacz $A \cdot B$.

Zauważ, że $A \cdot B = 0$, lecz $A \neq 0$ i $B \neq 0$.

b) $A_{2 \times 3}, B_{4 \times 1}, C_{3 \times 1}, D_{3 \times 4}$. Czy można wykonać działania

1) C^TDB , 2) $AB - A^TC$, 3) $B^TB - C^TC$, 4) $AD - B^T$, 5) $BC^T - D^T$.

Gdy działanie jest wykonalne określ wymiary wyniku.

Zadanie 4

Uzasadnić, że dla macierzy kwadratowych zachodzi własność

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Zadanie 5

Oblicz AB i BA jeśli $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$,

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(odp. a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3a & -2 \\ 4 & 5a & 2 \\ -6 & 7a & 8 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4a & 5a & 2a \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$,

b) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3b-2 \\ 4 & 5 & 5b+2 \\ -6 & 7 & 7b+8 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4-6b & 5+7b & 2+8b \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$,

c) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Zadanie 6

Oblicz,

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$,

b) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^n$

(odp. a) 0, b) $\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{bmatrix}$)

Zadanie 7

Oblicz $f(A) = x^2 - 2x + 5$ jeśli $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(odp. $\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$)

Zadanie 8

Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(odp. $\det A = 7$, $\det B = 0$, $\det C = -2$, $\det D = -6$)

Zadanie 9

Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

(odp. $\det A = -4$, $\det B = -99$)

Zadanie 10

a) Macierz A ma stopień 3 i $\det A = 5$. Ile wynosi wyznacznik macierzy:

1) A^2 , 2) $4A$, 3) $0,25(A^T)^T$, 4) A^{-1} , 5) $8A^T$.

b) Sprawdź, że $\det(4(BA)^{-1}B^T A^T) = 4^n$, dla dowolnych nieosobliwych macierzy A, B stopnia n .

c) Sprawdź, że $\det((2A^T)^{-1}A^{-1}(AA^T))^{-1} = 2^n$, dla dowolnej macierzy A stopnia n i $\det A = 2$.

Zadanie 11

Rozwiąż równanie:

a)
$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+12 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -x \\ 2 & 1+x & 8 \\ 0 & 2 & 5x \end{vmatrix} = 14$$

(odp. a) -10, 2; b) -1, 0,5; c) -1)

Zadanie 12

Wyznacz (jeżeli istnieje) macierz odwrotną do macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$;

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \text{ d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(\text{odp. a) } \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -1,5 \\ -0,125 & 0,125 & 0,375 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \text{ c) } \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & -0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix})$$

Zadanie 13

Wyznacz (stosując jedną i drugą metodę) macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(\text{odp. } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & -2 \\ 0,5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, I^{-1} = I)$$

Zadanie 14

Wyznacz macierz X jeśli

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{d) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$(\text{odp. a) } X = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ -2,5 \end{bmatrix}, \text{ b) } X = [-0,5 \quad -1 \quad 3], \text{ c) } X = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -1 & -4,5 \\ 1 & 6,5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } X = \begin{bmatrix} -0,5 & 2 & -5 \\ -0,5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ e) } X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}, \text{ f) } X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ g) } X = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix})$$

Zadanie 15

Znaleźć rząd macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ b) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ c) } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \text{ d) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ g) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \text{ h) } [2 \quad 7]; \text{ i) } [0 \quad 0]; \text{ j) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(odp. a) 3, b) 3, c) 2, d) 2, e) 2, f) 3, g) 2, h) 1, i) 0, j) 4)

Zadanie 16

Wyznacz rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}$ w zależności od parametru c .

(odp. $\text{rz}A = 1$, gdy $c = 1$ lub $c = -1$, $\text{rz}A = 2$, dla pozostałych c)

Zadanie 17

Ile powinien wynosić wyznacznik macierzy A spełniającej równanie $A^2 - A^T = 0$.

(odp. 0 lub 1)

Zadanie 18

Oblicz

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ b) } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(odp. a) 1, b) 5!)

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ równań liniowych – postać macierzowa

Układ równań liniowych ma postać ogólną:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} – współczynniki; x_i – niewiadome; b_j – wyrazy wolne

n – liczba niewiadomych; m – liczba równań

Jeśli $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ – macierz współczynników

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – wektor niewiadomych; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ – wektor wyrazów wolnych

to powyższy układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$AX = B$$

Jeśli $B = 0$ to układ nazywamy **jednorodnym**.

Macierzą rozszerzoną układu (*) nazywamy macierz

$$M = [A|B]$$

(do macierzy współczynników dopisujemy kolumnę wyrazów wolnych)

Układ n liczb $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spełniających każde równanie układu (*) nazywamy **rozwiązaniem** tego układu.

Układ równań liniowych może być:

- **oznaczony** (ma dokładnie jedno rozwiązanie),
- **nieoznaczony** (ma nieskończenie wiele rozwiązań),
- **sprzeczny** (nie ma żadnego rozwiązania).

Uwaga

Układ jednorodny nie może być sprzeczny, (ma przynajmniej rozwiązanie zerowe).

Własności układu równań liniowych charakteryzuje na podstawie rzędu macierzy współczynników A i rzędu macierzy rozszerzonej M **twierdzenie Kroneckera - Capellego**:

Twierdzenie

Jeśli $\text{rz}A \neq \text{rz}M$ to układ (*) jest **sprzeczny** (nie ma żadnego rozwiązania).

Jeśli $\text{rz}A = \text{rz}M = n$ to układ (*) jest **oznaczony** (ma dokładnie jedno rozwiązanie).

Jeśli $\text{rz}A = \text{rz}M < n$ to układ (*) jest **nieoznaczony** (ma nieskończenie wiele rozwiązań).

W ostatnim przypadku niewiadome dzielimy na **niewiadome bazowe** i **parametry**. Rozwiązanie zależy od $n - rzA$ parametrów, natomiast liczba niewiadomych bazowych jest równa rzA .

Metody rozwiązywania układów równań liniowych

1. Metoda macierzowa

$$X = A^{-1}B$$

(można stosować gdy $m = n$ i $\det A \neq 0$, wtedy układ jest oznaczony).

Przykład

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det A = -1 \quad A^{-1} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix}$$

Zatem rozwiązaniem tego układu równań są liczby $x = 0, y = 1, z = -1$, fakt ten możemy sprawdzić podstawiając te liczby do równań układu i porównać strony.

2. Metoda wyznacznikowa

Twierdzenie Cramera

Jeśli $m = n$ i $\det A \neq 0$, wtedy układ jest oznaczony (układ Cramera) oraz:

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{W_n}{W}$$

gdzie $W = \det A$, $W_j = \det A_j$ $j = 1, 2, \dots, n$

A_j – macierz otrzymana z A przez zastąpienie j -tej kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych.

Uwaga

Jeśli $W = 0$ i co najmniej jeden wyznacznik $W_j \neq 0$ to układ jest sprzeczny.

Jeśli $W = W_1 = W_2 = \dots = W_n = 0$ to układ jest sprzeczny lub nieoznaczony.

Przykład

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det A = -1 = W \quad W_1 = 0, W_2 = -1, W_3 = 1$$

zatem $x = 0, y = 1, z = -1$.

3. Metoda eliminacji Gaussa

Przekształcenia elementarne układu równań liniowych.

- mnożenie równania przez liczbę różną od zera,
- zmiana kolejności równań w układzie,
- dodanie do dowolnego równania innego równania tego układu pomnożonego przez dowolną liczbę.

Wykonywanie przekształceń elementarnych na danym układzie równań nie zmienia zbioru jego rozwiązań (otrzymujemy **układ równoważny** danemu).

W przypadku zapisu macierzowego powyższe operacje wykonujemy na wierszach macierzy rozszerzonej.

Stosując operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej przekształcamy macierz rozszerzoną do postaci:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rr} & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{r+k} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

gdzie $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{rr} \neq 0; r = \text{rz} A$

- Jeśli dla pewnego $i = 1, 2, \dots, k$ $\tilde{b}_{r+i} \neq 0$ to układ sprzeczny,
- Jeśli dla $i = 1, 2, \dots, k$ $\tilde{b}_{r+i} = 0$ i $r < n$ to układ nieoznaczony, zmienne $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ przyjmujemy, że są **parametrami** (mogą przyjmować dowolne wartości) i przy wyznaczaniu niewiadomych bazowych przenosimy je na prawą stronę traktując jak wyrazy

wolne, niewiadome $x_1, x_2, \dots, x_r$ przyjmujemy, że są **bazowe** i obliczamy ich wartość rozpoczynając od najniższego równania różnego od zera (obliczone wartości podstawiamy do kolejnych równań).

- Jeśli dla $i = 1, 2, \dots, k$ $\tilde{b}_{r+i} = 0$ i $r = n$ to układ oznaczony, wszystkie niewiadome są **bazowe** i obliczamy ich wartość rozpoczynając od najniższego równania różnego od zera.

Przykład

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$M = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Po zastosowaniu przekształceń elementarnych otrzymamy:

$$\tilde{M} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

x_1, x_2 – przyjmujemy, że są **bazowe**

x_3, x_4, x_5 – przyjmujemy, że są **parametrami**

z równania II $-2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1$

obliczamy $x_2 = -0,5 + 0,5x_3 - x_4 + x_5$

z równania I $x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0$ po podstawieniu x_2

obliczamy $x_1 = 0,5 - 0,5x_3$

Uwaga

W przypadku układu nieoznaczonego można rozpatrywać różne układy niewiadomych bazowych (wszystkich takich układów jest najwyżej $\binom{n}{r}$). Rozwiązanie układu

nieoznaczonego jest **rozwiązaniem bazowym** jeśli pod parametry podstawiamy wartość zero. Rozwiązania bazowe są przydatne w zagadnieniach optymalizacji.

Rozwiązania bazowe układu nieoznaczonego

Z metody Gaussa wynika istnienie rozwiązania bazowego (pod parametry podstawiamy zera). Rozwiązań bazowych może być wiele. Aby otrzymać inne rozwiązanie bazowe należy przyjąć, że w nowym rozwiązaniu bazowym jeden z dotychczasowych parametrów będzie zmienną bazową a jedna z dotychczasowych zmiennych bazowych będzie parametrem. Następnie pod nowe parametry podstawiamy wartość 0 i rozwiązujemy otrzymany układ równań liniowych.

Możliwe są dwie sytuacje:

- otrzymany układ jest oznaczony i otrzymujemy nowe rozwiązanie bazowe,
- otrzymany układ jest nieoznaczony lub sprzeczny, wtedy należy szukać innego rozwiązania bazowego.

Wszystkich rozwiązań bazowych nie może być więcej niż $\binom{n}{r}$.

Przykład

Rozpatrzmy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 - 2x_6 = 4 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Macierz rozszerzona tego układu jest równa

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

jest to układ nieoznaczony $r = \text{rz}A = \text{rz}M = 2$, $n = 6$.

Niech x_1, x_2 – zmienne bazowe; x_3, x_4, x_5, x_6 – parametry, rozwiązując układ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases} \text{ otrzymamy rozwiązanie bazowe } (6, 2, 0, 0, 0, 0).$$

Rozpatrzmy nowy układ niewiadomych x_1, x_5 – zmienne bazowe;

x_2, x_3, x_4, x_6 – parametry, wtedy odpowiedni układ:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 0 = 2 \end{cases} \text{ jest sprzeczny, zatem układ ten nie daje rozwiązania bazowego.}$$

Rozpatrzmy nowy układ niewiadomych x_1, x_3 – zmienne bazowe;

x_2, x_4, x_5, x_6 – parametry, wtedy odpowiedni układ:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \text{ daje rozwiązanie bazowe } (4, 0, 2, 0, 0, 0).$$

Przykład

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe dla układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Uwaga. Wszystkie 6 możliwości najłatwiej rozpatrzeć wypełniając tabelkę:

	Zmienne bazowe					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Zmienn e	$x_1 \ x_2$	$x_1 \ x_3$	$x_1 \ x_4$	$x_2 \ x_3$	$x_2 \ x_4$	$x_3 \ x_4$
x_1				0	0	0
x_2		0	0			0
x_3	0		0		0	
x_4	0	0		0		

W tym celu rozwiązujemy układy równań:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 1,5 \\ x_2 = 1,5 \end{cases} & (2) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 6 \\ x_1 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_1 = 0 \end{cases} \\ (3) \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases} & (4) \quad \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ (5) \quad \begin{cases} 3x_2 - x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_4 = 3 \end{cases} & (6) \quad \begin{cases} -2x_3 - x_4 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{array}$$

wyniki wpisujemy do tabelki

	Zmienne bazowe					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Zmienne	$x_1 \ x_2$	$x_1 \ x_3$	$x_1 \ x_4$	$x_2 \ x_3$	$x_2 \ x_4$	$x_3 \ x_4$
x_1	1,5	0	3	0	0	0
x_2	1,5	0	0	0	3	0
x_3	0	-3	0	-3	0	-3
x_4	0	0	-3	0	3	0

Zatem rozwiązania bazowe są następujące:

(1,5; 1,5; 0; 0); (0; 0; -3; 0); (3; 0; 0; -3); (0; 3; 0; 3).

UKŁADY RÓWNAŃ - Zadania

Zadanie 1

Rozwiąż układ równań metodą macierzy odwrotnej:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ -x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(odp. a) (3,1), b) (2,3), c) (1, 0, -1), d) (1, 2, 3), e) (1, 0, 0, 1), f) (1, 2, 3, 4))

Zadanie 2

Rozwiąż układy równań z zadania 1 metodą Cramera.

Zadanie 3

Rozwiąż układy równań metodą Cramera:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_4 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_3 = 4 \end{cases}$$

(odp. a) (1, 0, 0, 0), b) (1, 0, 0, 0))

Zadanie 4

Sprawdź, czy następujące układy równań są sprzeczne:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 5

Rozwiąż układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 + 3x_3 - 3x_5 = 5 \\ -7x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{d)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \\ 13x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} \end{array}$$

(odp. a) układ nieoznaczony, np. x_3 – parametr, $x_2 = x_3 + 3$, $x_1 = 1$,
 b) układ oznaczony, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$,
 c) układ nieoznaczony, np. x_4, x_5 – parametry,
 d) układ sprzeczny,
 e) układ nieoznaczony, np. x_3, x_4 – parametry)

Zadanie 6

Przeanalizuj rozwiązalność następujących układów równań z parametrem:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 1 \\ kx_1 + 5x_2 = -2k - 5 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \end{array}$$

(odp. a) układ nieoznaczony dla $k = -2$, dla pozostałych k układ oznaczony,
 b) układ nieoznaczony dla $k = -2$ i $k = 1$, dla pozostałych k układ oznaczony
 c) układ nieoznaczony dla $k = 15$, dla pozostałych k układ oznaczony)

Zadanie 7

Czy dany układ równań ma rozwiązania niezerowe:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \end{array}$$

(odp. a) tak, b) nie, c) tak, d) nie)

Zadanie 8

Rozwiąż układy równań jednorodnych:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(odp. a) układ nieoznaczony, np. x_4, x_5 – parametr,

b) układ oznaczony, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$)

Zadanie 9

Napisz układ równań którego jedynym rozwiązaniem są liczby $(1, -1, 0, 0, 2)$.

Zadanie 10

Napisz układ równań nieoznaczonych, którego jedynym z rozwiązań są liczby $(1, -1, 0, 0, 2)$.

Zadanie 12

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe dla układu równań:

$$\text{(a) } \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 700 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_4 = 1280 \end{cases}$$

$$\text{(b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ 5x_2 - x_5 = 5 \end{cases}$$

(odp. a) $(40, 60, 0, 0), (160, 0, -900, 0),$
 $(70, 0, 0, 720), (0, 80, 300, 0),$
 $(0, 140, 0, -960), (0, 0, 700, 1280),$
 b) $(4,5; 1, 4, 0, 0), (2,5; 1; 0; -4; 0),$
 $(1,5; 3; 0; 0; 10), (6; 0; 6; 0; -5),$
 $(3; 0; 0; -6; -5), (0, 1; -5; -9; 0),$
 $(0; 4; -2; 0; 15), (0; 6; 0; 6; 25),$
 $(0; 0; -6; -12; -5))$

Zadania powtórzeniowe.

Zadanie 1.

d) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, wyznacz $A \cdot B$, $B \cdot A$,

Odp. a) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2.

Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Odp. $\det A = 5$, $\det B = 0$, $\det C = 2$, $\det D = -2$.

Zadanie 3.

Wyznacz macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

Odp. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1,8 & -0,4 & -0,8 \\ 0,2 & 0,4 & -0,2 \\ -2,4 & 0,2 & 1,4 \end{bmatrix}$,

Zadanie 4.

Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Odp. $rA = 2$, $rB = 1$, $rC = 3$.

Zadanie 5.

Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8 \\ 13x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

a) ukł. oznaczony, $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3,$

b) ukł. oznaczony, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,$

c) ukł. nieoznaczony, np. x_3 - parametr,

d) ukł. sprzeczny,

e) ukł. nieoznaczony, np. x_4 - parametr .

Zadanie 6.

Wyznacz macierz X jeśli

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odp. a) } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ b) } X \cdot = \begin{bmatrix} 1,5 & 3 & -9 \end{bmatrix},$$