

CAŁKA NIEOZNACZONA

f - funkcja określona w przedziale E .

Funkcją pierwotną funkcji f w przedziale E nazywamy funkcję F taką, że

$$F'(x) = f(x) \quad \bigwedge_{x \in E}$$

Np. funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x + 3$ $x \in \mathbb{R}$

jest funkcja $F(x) = x^2 + 3x$ bo $F'(x) = 2x + 3$,

Zauważmy, że funkcje $F(x) = x^2 + 3x + 5$ i $F(x) = x^2 + 3x - 2$ też są funkcjami pierwotnymi tej funkcji.

Ogólnie $F(x) = x^2 + 3x + C$ gdzie C - dowolna stała, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x + 3$.

Twierdzenie.

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale E to każda funkcja pierwotna ma postać $\Phi(x) = F(x) + C$.

Całką nieoznaczoną funkcji f w przedziale E jest zbiór jej wszystkich funkcji pierwotnych czyli zbiór $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f .

Stosujemy zapis:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Całkowanie = obliczanie całki nieoznaczonej.

Twierdzenie.

Jeśli f jest ciągła w E to istnieje w tym przedziale całka nieoznaczona funkcji f .

Podstawowe wzory:

$$\int 0 dx = C \quad \int dx = x + C \quad \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

Inne wzory.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C \quad \int \tg x dx = -\ln|\cos x| + C \quad \int \ctg x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\ctg x + C$$

Przykład.

$$\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

Własności.

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx \quad \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Przykład.

$$\int 6x^2 - 4x + 3 dx = 6 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 3 \int dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$$

Przykład.

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx - \int x^{-\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + C$$

Całkowanie przez części.

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Przykład.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = x \quad f'(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \quad f(x) = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C$$

Przykład.

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \ln x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$$

Całkowanie przez podstawianie.

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Wnioski.

$$1) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$2) \quad \text{Jeśli } \int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{to} \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Przykład.

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ dx = \frac{1}{\cos x} dt \end{array} \right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

Przykład.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln|\cos x| + C$$

Przykład.

$$\int \cos(2x-5)dx = \frac{1}{2} \sin(2x-5) + C$$

Przykład.

$$\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{1}{3} \frac{2}{3} (3x+2)^{3/2} + C = \frac{2}{9} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$$

Całkowanie przez rozkład na ułamki proste.

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx = \int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)} dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-2} dx = \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C$$

Przykład.

Koszt krańcowy (koszt wyprodukowania $x + 1$ sztuki) wyraża się wzorem:

$$f(x) = 6x^2 - 200x + 1000$$

Wiadomo, że koszt wyprodukowania pierwszej sztuki wynosi 102. Jaki jest koszt wyprodukowania 5 sztuk.

Rozwiązanie: $K(x)$ – koszt wyprodukowania x sztuk (funkcja kosztów).

Ponieważ $K'(x) = f(x)$ to

$$K(x) = \int 6x^2 - 200x + 1000 dx = 2x^3 - 100x^2 + 1000x + C$$

Ponieważ $K(1) = 102$ to stąd $C = -800$.

Zatem $K(x) = 2x^3 - 100x^2 + 1000x - 800$ oraz $K(5) = 1950$.

CAŁKA OZNACZONA

Całka oznaczona funkcji ciągłej.

f - funkcja określona i ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$.

$$\int_a^b f(x) dx = (F(x)) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

gdzie F - funkcja pierwotna funkcji f w tym przedziale.

Uwaga.

Przyjmuje się, że

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Przykład.

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x - 2) dx = \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Uwaga. (własności całki oznaczonej)

1) addytywność względem przedziałów całkowania

Jeśli $c \in \langle a, b \rangle$ to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

2) równość całek

Niech funkcja f będzie całkowna na przedziale $[a, b]$ oraz niech funkcja g różni się od funkcji f tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału. Wtedy funkcja g także jest całkowna na przedziale $[a, b]$ oraz

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

3) zachowanie nierówności przy całkowaniu

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

4) całka funkcji nieparzystej

Niech funkcja f będzie nieparzysta i całkowalna na przedziale $[-a, a]$. Wtedy

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

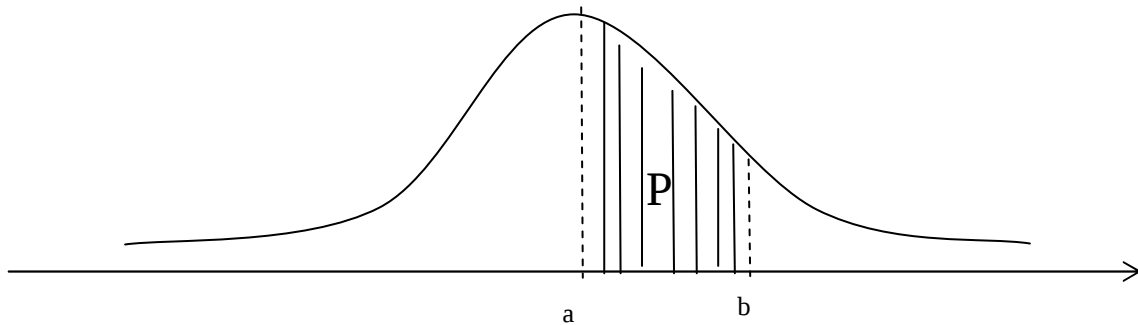
5) całka funkcji parzystej

Niech funkcja f będzie parzysta i całkowalna na przedziale $[-a, a]$. Wtedy

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

6) Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

Jeśli $f(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b)$ to $\int_a^b f(x)dx = P$ (pole obszaru pod krzywą f dla $x \in (a, b)$).



7) Średnia całkowa.

$$\bar{f}_c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Tw (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli

1. funkcja $\varphi: [\alpha, \beta] \xrightarrow{na} [a, b]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha, \beta]$,
2. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
3. funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$,

to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Uwaga. W przypadku gdy funkcja φ jest rosnąca, ostatni wzór można zapisać w postaci:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Tw. (o całkowaniu przez części)

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

ZASTOSOWANIA CAŁEK OZNACZONYCH

Pole trapezu krzywoliniowego

Niech funkcje d i g będą ciągłe na przedziale $[a,b]$ oraz niech $d(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Pole trapezu krzywoliniowego P ograniczonego wykresami funkcji d i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx.$$

Długość krzywej

Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$. Długość krzywej $L = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Objętość bryły obrotowej

Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a,b]$. Ponadto niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$, gdzie $a < b$. Objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Pole powierzchni obrotowej

Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$. Pole powierzchni S powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Przykład.

Koszt całkowity wyprodukowania x sztuk towaru wyraża się wzorem:

$$K(x) = 0,04x^3 - 3x^2 + 100x - 80$$

Jaki jest średni koszt produkcji jeśli produkcja wynosiła 10 i wzrosła do 20 sztuk.

Rozwiązanie: Średni koszt produkcji wyznaczamy jako średnią całkową kosztów.

$$\bar{K}_c = \frac{1}{20-10} \int_{10}^{20} K(x)dx = \frac{1}{10} (0,01x^4 - x^3 + 50x^2 - 80x) \Big|_{10}^{20} =$$

$$= 0,1(1600 - 8000 + 20000 - 1600 - 100 + 1000 - 5000 + 800) = 870$$

Zauważmy, że $K(10) = 660$, $K(20) = 1040$, $\bar{K} = 850$.

Przykład.

Obliczyć pole obszaru zawartego między krzywymi: $f_1(x) = x^2 - 2$ i $f_2(x) = x$

$$P = \int_{-1}^2 (x - (x^2 - 2))dx = 4,5$$

Całka niewłaściwa (nieograniczony zakres całkowania).

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx, \quad c - \text{ustalona liczba, np. } c = 0.$$

Jeśli rozpatrywana granica nie istnieje lub nie jest skończona, to mówimy, że **całka jest rozbieżna**.

Przykład.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^b = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = (\arctg x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|x|) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty \quad (\text{całka rozbieżna})$$

Funkcja górnej granicy całkowania.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad x \in \langle a, b \rangle$$

- jest ciągła w $\langle a, b \rangle$,
- jeśli f ciągła to F jest różniczkowalna oraz $F'(x) = f(x)$.

CAŁKA - zadania

1. Oblicz całki

a) $\int \frac{1-x}{x^3} dx;$

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C \right]$$

b) $\int \sqrt[3]{\frac{1}{x}} dx;$

$$\left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C \right]$$

c) $\int \frac{-1+x}{x^2} dx;$

$$\left[\frac{1}{x} + \ln|x| + C \right]$$

d) $\int \frac{1}{(7x+1)^3} dx$

$$\left[\frac{-1}{14(7x+1)^2} + C \right]$$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$

$$\left[-\sqrt{1-2x} + C \right]$$

f) $\int x e^{-x} dx$

$$\left[-(x+1)e^{-x} + C \right]$$

g) $\int x^2 e^x dx$

$$\left[(x^2 - 2x + 2)e^x + C \right]$$

h) $\int \ln \sqrt{x} dx$

$$\left[x \ln x - 0,5x + C \right]$$

$$\text{i) } \int \frac{3x}{2\sqrt{x+1}} dx \quad \left[(x-2)\sqrt{x+1} + C \right]$$

$$\text{j) } \int e^{\sqrt{x}} dx \quad \left[(\sqrt{x}-1)2e^{\sqrt{x}} + C \right]$$

$$\text{k) } \int \frac{2x+1}{x^2+x-12} dx \quad \left[\ln|x-3| + \ln|x+4| + C \right]$$

$$\text{l) } \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx \quad \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{0,25}{x-1} - \frac{0,25}{x+1} + C \right]$$

2. Oblicz całki oznaczone:

$$\text{a) } \int_1^2 (4x^3 + 1) dx; \quad [16]$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{x dx}{x^2 + 1}; \quad [\ln \sqrt{2,5}]$$

$$\text{c) } \int_0^2 (1 + e^{2x}) dx \quad [0,5(3 + e^4)]$$

3. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$\text{a) } y = x^2; y = 4 \quad \left[10 \frac{2}{3} \right]$$

$$\text{b) } y = x^2; y = 0,5x^2 + 2 \quad \left[5 \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{c) } y = e^x; y = 2, \quad x = 0 \quad [\ln 4 - 1]$$

4. Oblicz całki niewłaściwe:

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}; \quad [2]$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^0 x e^x dx \quad [-1]$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE PIERWSZEGO RZĘDU.

Równania, w których funkcja niewiadoma występuje pod znakiem pochodnej pierwszego rzędu nazywamy **równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu**.

Przykład.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{czyli} \quad y' = 2x \quad \text{jest równaniem różniczkowym.}$$

Rozwiązanie tak prostego równania możemy odgadnąć, jest to rodzina parabol

$$y = x^2 + C \quad C - \text{dowolna stała}$$

Taką rodzinę funkcji nazywamy **rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego**.

Jeśli do równania dołączymy dodatkowy warunek zwany **warunkiem początkowym** np. $y(0) = 1$ to, podstawiając ten warunek do wzoru na rozwiązanie ogólne $1 = 0^2 + C$ otrzymamy $C = 1$ i konkretne rozwiązanie $y = x^2 + 1$, zwane **rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego**.

W zagadnieniach ekonomii matematycznej rozpatruje się modele wzrostu gospodarczego w postaci równań różniczkowych:

Model Domara

$$\frac{dI}{dt} = \rho s I \quad I(t) - \text{inwestycje w chwili } t,$$

Model Solowa

(przypadek szczególny dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa))

$$\frac{dk}{dt} + \lambda k = s k^\alpha \quad k(t) - \text{iloraz kapitału przez pracę w chwili } t,$$

Wybrane typy równań i metody ich rozwiązywania.

Równania o zmiennych rozdzielonych.

Równanie, które możemy przedstawić w następującej postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

nazywamy równaniem różniczkowym **o zmiennych rozdzielonych**.

Model Domara jest równaniem tego typu.

Gdy $g(y) \neq 0$, równanie to można zapisać w postaci:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

Rozwiązanie tego równania otrzymujemy poprzez całkowanie stron czyli równość:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

Przykład:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$

Obliczamy całki:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

Zatem:

$$-\frac{1}{x} + C = \ln |y|$$

stąd

$$y = e^{\frac{1}{x}C'} \quad \text{gdzie } C' = \pm e^C$$

Jest to rozwiązanie ogólne tego równania. Gdyby dodatkowo był podany warunek początkowy, np.: $y(1) = 1$, to rozwiązanie szczególne spełniające ten warunek ma postać:

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

Równania różniczkowe liniowe, jednorodne

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

Rozwiązujemy je stosując metodą rozdzielania zmiennych i jako rozwiązanie ogólne otrzymujemy:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Równania różniczkowe liniowe, niejednorodne

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Rozwiązujemy je np. za pomocą metody **uzmienniania stałej**.

Rozpatrujemy rozwiązanie równania jednorodnego $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Uzmienniamy stałą występującą w tym rozwiązaniu, tzn. rozpatrujemy rozwiązanie postaci

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Obustronnie różniczkujemy względem zmiennej x :

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Wstawiamy wyliczone wartości do wyjściowego równania i otrzymujemy:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = f(x)$$

$$\text{czyli } C'(x) = f(x)e^{\int P(x)dx}$$

stąd

$$C(x) = \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

oraz

$$y = \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Przykład.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$$

Najpierw rozwiążemy równanie jednorodne:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C$$

$$\int -2xdx = -x^2 + C$$

$$\ln |y| = -x^2 + C \Rightarrow y = \tilde{C}e^{-x^2}, \quad \text{gdzie } \tilde{C} = \pm e^C$$

Uzmienniamy stałą $\tilde{C}$

$$y = \tilde{C}(x)e^{-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{C}'(x)e^{-x^2} - 2\tilde{C}(x)xe^{-x^2}$$

Po podstawieniu do wyjściowego równania otrzymujemy kolejno

$$\tilde{C}'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

$$\tilde{C}'(x) = x$$

$$\tilde{C}(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)e^{-x^2}$$

Inna metoda rozwiązywania równań liniowych, niejednorodnych opiera się na własności:

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest równe sumie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Szczególne rozwiązywanie równania niejednorodnego możemy otrzymać metodą przewidywania (przewidujemy, że rozwiązanie jest funkcją (z parametrami), tego samego typu co $f(x)$, przy czym jeśli przewidywanie nie prowadzi do rozwiązania należy je pomnożyć przez x).

Przykład.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x$$

Jak wiemy z poprzedniego przykładu, rozwiązanie ogólnego równania jednorodnego jest równe $y = Ce^{-x^2}$. Szczególne rozwiązywanie równania niejednorodnego otrzymamy metodą przewidywania. Przewidujemy, że będzie to rozwiązanie postaci $y = a + bx$. Po podstawieniu do równania otrzymamy $b + 2x(a + bx) = 2x$. Porównując współczynniki przy jednakowych potęgach otrzymamy $a = 1, b = 0$.

Szczególne rozwiązywanie równania niejednorodnego jest zatem równe $y = 1$, a rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać $y = 1 + Ce^{-x^2}$ (jest równe sumie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i otrzymanego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego).

Równanie Bernoulliego.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^m, \text{ gdzie } m \neq 0, m \neq 1,$$

Rozwiązujemy je sprowadzając poprzez podstawienie:

$$y^{m-1} = z$$

do postaci równania liniowego niejednorodnego.

Obliczmy pochodną zmiennej z względem x i otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} y^{-m} = (1-m)^{-1} \frac{dz}{dx}$$

Po podstawieniu nowych zmiennych do wyjściowego równania, przyjmuje ono postać:

$$\frac{dz}{dx} + P(x)(1-m)z = (1-m)f(x)$$

I możemy je rozwiązać stosując metodę np. uzmiennia stałej.

Model Solowa jest równaniem tego typu.

Informacja o równaniach różnicowych pierwszego rzędu.

Badając zjawisko w dyskretnych chwilach czasu otrzymujemy niekiedy zależność postaci

$$f(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n}, t) = 0$$

zwaną **równaniem różnicowym n-tego rzędu**.

W dalszym ciągu rozpatrzmy równanie rzędu 1 o stałych współczynnikach

$$y_{t+1} + ay_t = b$$

Jego rozwiązaniem ogólnym jest

$$y_t = \begin{cases} c(-a)^t + \frac{b}{1+a} & \text{gdy } a \neq -1 \\ c + bt & \text{gdy } a = -1 \end{cases} \quad c - \text{stała dowolna}$$

Jeśli dla $t = 0$, dany jest warunek początkowy y_0 to rozwiązaniem szczególnym jest

$$y_t = \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{b}{1+a} & \text{gdy } a \neq -1 \\ y_0 + bt & \text{gdy } a = -1 \end{cases}$$

Przykład.

K_t – kapitał po t latach gdy K_0 ulokujemy na $p\%$ rocznie (procent składany)
Mamy zależność

$$K_{t+1} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) K_t$$

Jest to równanie rzędu 1, warunkiem początkowym jest K_0 . Zatem

$$K_t = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t K_0$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE - Zadania

Zadanie 1

Rozwiązać równania różniczkowe stosując metodę rozdzielania zmiennych.

$$\text{a) } y' = \frac{-2x}{e^y} \quad \text{b) } y' = -2xy^2$$

$$\text{Odp. a) } y = \ln(c - x^2), \quad \text{b) } y = \frac{1}{x^2 + c}$$

Zadanie 2.

Wyznaczyć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego liniowego stosując metodę uzmienniania stałej.

$$\text{a) } y' + 5y = \frac{1}{e^{5x} + 1} \quad \text{b) } y' + \frac{5}{x}y = \frac{2}{x^4}$$

$$\text{Odp. a) } y = \frac{1}{5}e^{-5x} \ln(e^{5x} + 1), \quad \text{b) } y = \frac{1}{x^3}$$

Zadanie 3. Wyznaczyć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego liniowego stosując metodę przewidywania.

$$\text{a) } y' + 5y = 4e^{-3x} \quad \text{b) } y' + y = x^2$$

$$\text{Odp. a) } y = 2e^{-3x}, \quad \text{b) } y = 2 - 2x + x^2$$

MATEMATYKA II - zadania powtórzeniowe.

Zadanie 1. Oblicz a) $\int \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{x}} dx$; b) $\int x e^{3x} dx$ c) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ d) $\int (4x+1)^9 dx$

e) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ f) $\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2} dx$

Odpo. a) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + C$; b) $\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3}\right) + C$; c) $\frac{-1}{2(x^2+1)} + C$; d) $\frac{1}{40} (4x+1)^{10} + C$;

e) $\frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C$; f) $\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$;

Zadanie 2. Całkując przez części, wyznacz następujące całki:

a) $\int x e^{2x} dx$ b) $\int x \cos 3x dx$ c) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ d) $\int x \sqrt{x+1} dx$

Odpo. a) $\frac{1}{4} (2x-1) e^{2x} + c$ b) $\frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c$

c) $2\sqrt{x} (\ln x - 2) + c$ d) $\frac{2}{15} (3x-2)(x+1)^{3/2} + c$

Zadanie 3. Korzystając z podanych podstawień, wyznacz następujące całki:

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ $t = \sqrt{x}$ b) $\int \sin \ln x dx$ $t = \ln x$

c) $\int \frac{1}{(1+x)^2} dx$ $t = 1+x$ d) $\int x \sqrt{x+1} dx$ $t = \sqrt{x+1}$

Odpo. a) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + c$ b) $\frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x) + c$

c) $\frac{-1}{1+x} + c$ d) $\frac{2}{15} (3x^2+x-2)\sqrt{x+1} + c$

Zadanie 4. Oblicz pole powierzchni ograniczonej wykresami funkcji

a) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{4}x$, b) $y = -x^2 + 3x + 1$, $y = x^2 - 2x - 2$

Odpo. a) $1/6 + \ln 2$, b) $14 \frac{7}{24}$

Zadanie 5. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = x^2 - 2x$; $y = x$ b) $y = -x^2 + 8x$; $y = x^2 - 4x$

Odpo. a) 4,5 b) 72

Zadanie 6. Popyt na pewien towar jest funkcją ceny c $p(c) = \frac{c}{2c^2+1}$.

Obliczyć średnią wartość popytu jeżeli cena wzrośnie od 4 do 5 jednostek.

Odpo. $p_{\text{sr}} = \frac{1}{4} \ln \frac{17}{11}$

Zadanie 7. Wartość sprzedaży produkcji fabryki odzieży po t dniach od 1 stycznia wynosi

$s(t) = 2600e^{0,1t}$ zł dziennie.

- a) wyznaczyć wartość sprzedaży po 10 dniach.
 b) po ilu dniach wartość sprzedaży odzieży przekroczy 100 000zł?
 Odp. a) około 44680 zł, b) po 16 dniach.

Zadanie 8. Wydajność robotnika wyraża się wzorem $w(t) = 12 + t - \frac{1}{6}t^2$ jednostek na

godzinę (t - czas od rozpoczęcia pracy liczony w godzinach). Wyznacz liczbę jednostek wytworzonych przez robotnika w ciągu 8 godzin pracy.

Odp. około 99,6 jednostki (wskazówka: oblicz całkę $\int_0^8 w(t)dt$)

Zadanie 9. Niech $W(t)$ - wydajność robotnika po t godzinach pracy mierzona w jednostkach wytworzonego produktu na godzinę pracy. Norma dzienna wynosi 80 jednostek. Obliczyć procent wytworzenia dziennej normy przez robotnika dla którego $W(t) = 12 + t - \frac{1}{6}t^2$.

Czy robotnik ten może pracować w godzinach nadliczbowych? Jak długo? (zakładamy 8 godzinny dzień pracy).

Odp. 122,44%, może mieć 4 godziny nadliczbowe.

Zadanie 10. Zapas Z ton pewnego towaru w magazynie zmienia się w ciągu miesiąca (30 dni) i po upływie t dni (licząc od początku miesiąca) wyraża się wzorem

$$Z(t) = 0,01t^3 + 0,15t^2 - 18t + 300.$$

W którym momencie zapas towaru jest najmniejszy? Jaki jest średni zapas w ciągu miesiąca?

Odp. $Z_{\min} = Z(20) = 8$, $Z_{\text{sr}} = 142,5$.

Zadanie 11. Wiadomo, że w czasie akcji charytatywnej przyrost dochodu jest wolniejszy z upływem czasu akcji (tzn. stopa przyrostu dochodu maleje z czasem). Niech stopa ta wyraża się wzorem

$$S(t) = -100t^2 + 20000 \quad (\text{zł / dzień}) \quad t\text{-czas w dniach}$$

Zakładając, że stopa kosztu akcji $K(t)$ jest stała i wynosi 10 000 zł/dzień

- a) wyznaczyć czas trwania akcji, który daje maksymalny dochód
 b) wyznaczyć wielkość tego dochodu D .
 c) wyznaczyć koszt tej akcji K .
 d) wyznaczyć zysk z tej akcji Z .

Uwaga. Akcja trwa aż stopa przyrostu dochodu zrówna się ze stopą kosztów. Mamy też

$$S(t) \approx D'(t).$$

Odp. a) $t = 10$ dni, b) $D(10) = 166\,666$ zł, c) $K(10) = 100\,000$ zł, d) $Z(10) = 66\,666$ zł

Zadanie 12. Popyt na pewien towar jako funkcja ceny c wyraża się wzorem

$$PP(c) = c^2 - 40c + 400$$

a jego podaż $PD(c) = 10c$

Wyznaczyć pełną użyteczność tego towaru PU .

Uwaga. Użyteczność towaru U jest jego wartością przy cenie równowagi.

Nadwyżka użyteczności towaru $NU = \int_{c_0}^{c_1} PP(c)dc$, gdzie c_0 jest ceną równowagi, a c_1 jest

ceną przy której popyt jest równy zero. Pełna użyteczność wynosi $PU = U + NU$.

Odp. $c_0 = 10$, $U = 1000$, $NU = 333$, $PU = 1333$.

Zadanie 13. Oblicz: a) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$; b) $\int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$

Odp. a) $\ln 2$; b) 1,75

Zadanie 14. Oblicz całki niewłaściwe: a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

Odp. a) rozbieżna b) 2

Zadanie 15. Rozwiązać równania różniczkowe

$y' = \frac{x}{y}$ Odp. $y = \pm \sqrt{x^2 + c}$

$y' - \frac{5}{x}y = x^5$ Odp. c) $y = x^6$

$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = 0,$ Odp. $\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = C$

$x(1+e^y) - e^y \frac{dy}{dx} = 0,$ Odp. $x^2 + 2\ln(1+e^y) = C$

MATEMATYKA IIa – TEST

1. Ile wynosi całka $\int \sqrt[5]{x^3} dx$?

A) $\frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}} + C$ B) $\frac{5 \cdot \sqrt[8]{x^5}}{8} + C$ C) $\frac{3}{5 \cdot \sqrt{x^5}} + C$ D) $\frac{5 \cdot \sqrt[5]{x^8}}{8} + C$

2. Ile wynosi całka $\int 2e^{-4x} dx$?

A) $2e^{-4x} + C$ B) $-8e^{-4x} + C$ C) $-0,5e^{-4x} + C$ D) $4e^{-4x} + C$

3. Wiadomo, że $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Ile wynosi całka $\int_0^2 (f(x) + 1) dx$?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6

4. Średnia całkowa funkcji $f(x) = |x|$ w przedziale $[-1; 1]$ wynosi:

A) 0 B) 2 C) 1 D) 0,5

Odpowiedzi: 1D, 2C, 3A, 4D,

Literatura:

R.Kozarzewski, W.Matuszewski, J.Zacharski, „Matematyka dla ekonomistów, część 2”,
J.Gawinecki, „Matematyka dla ekonomistów”,

Zestawienie pochodnych

Funkcja	Pochodna
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Własności pochodnej

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ gdzie $y_0 = f(x_0)$
$(f^g)' = (e^{g \ln f})'$
$(\log_f g)' = \left(\frac{\ln g}{\ln f}\right)'$

Zestawienie całek nieoznaczonych

Funkcja	Całka nieoznaczona
0	a) C
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc} \sin x + C$

Własności całek nieoznaczonych

$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + C$
$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$
$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \quad (\text{c. przez części})$
$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (\text{c. przez podstawianie})$

L.Kowalski 17.02.10