

Przestrzeń liniowa R^n .

Elementy (wektory) przestrzeni R^n będziemy oznaczać $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Element **zerowy** $0 = [0, 0, \dots, 0]$.

Działania.

a) **iloczyn elementu przez liczbę:**

$$cx = [cx_1, cx_2, \dots, cx_n]$$

b) **suma elementów**

$$x + y = [x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

Przestrzeń R^n z tak zdefiniowanymi działaniami nazywamy **przestrzenią liniową** lub **wektorową**.

Element

$$z = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

nazywamy **kombinacją liniową** elementów $x^1, x^2, \dots, x^k \in R^n$, gdzie

$$x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]$$

o współczynnikach $a_1, a_2, \dots, a_k \in R$.

Wektory $x_1, x_2, \dots, x_k \in R^n$ są **liniowo niezależne** jeśli wektor zerowy nie może być ich kombinacją liniową o niezerowych współczynnikach tzn. z równości $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = 0$ wynika, że $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, (w przeciwnym przypadku elementy te są **liniowo zależne**).

Nieskończony układ wektorów jest liniowo niezależny jeśli każdy skończony jego podzbiór jest liniowo niezależny.

Własności

- a) układ wektorów liniowo niezależnych nie może zawierać wektora zerowego,
- b) pojedynczy wektor jest liniowo niezależny, gdy jest niezerowy,
- c) dowolny podzbiór układu wektorów liniowo niezależnych jest liniowo niezależny,

- d) układ wektorów jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien wektor z tego układu daje się przedstawić w postaci kombinacji liniowej pozostałych.

Przykład

W przestrzeni liniowej R^3 , wektory $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, są liniowo niezależne, bo jeśli $ax + by = 0$, to $(a, b, 0) = (0, 0, 0)$ i z równości ciągów wynika, że $a = 0$, $b = 0$.

Natomiast wektory $x = (1, 1, 0)$, $y = (2, 2, 0)$, są liniowo zależne, bo $2x - y = 0$, czyli kombinacja liniowa tych wektorów o współczynnikach 2, -1 daje wektor zerowy.

Uwaga

W przestrzeni wektorowej R^n liniową niezależność wektorów można badać za pomocą rzędu macierzy, której wiersze lub kolumny to składowe rozpatrywanych wektorów. Zachodzi bowiem własność: wektory $x^1, x^2, \dots, x^k \in R^n$, gdzie $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rz} \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \vdots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \vdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \vdots & x_n^k \end{bmatrix} = k$$

Jeśli $k > n$ to elementy $x^1, x^2, \dots, x^k \in R^n$ muszą być liniowo zależne (rzęd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy).

Jeśli $k = n$ to elementy $x^1, x^2, \dots, x^n \in R^n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \vdots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \vdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \vdots & x_n^n \end{bmatrix} \neq 0$$

Przykład

W przestrzeni liniowej R^3 , wektory $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, $z = (0, 1, 1)$ są liniowo niezależne, bo

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

Natomiast wektory $x = (1, 1, 0)$, $y = (2, 3, 1)$, $z = (1, 2, 1)$ są liniowo zależne, bo

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Bazą przestrzeni liniowej R^n nazywamy uporządkowany układ liniowo niezależnych wektorów $x_1, x_2, x_3, \dots \in R^n$ taki, że każdy wektor x tej przestrzeni jest ich kombinacją liniową, tzn. istnieją $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, że $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$. Taką kombinację liniową nazywamy rozkładem wektora x w bazie $x_1, x_2, \dots, x_n$, a liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ **współrzednymi wektora** x w tej bazie.

Własności

- w każdej nietrywialnej (niezerowej) przestrzeni liniowej istnieje baza,
- każde dwie bazy danej przestrzeni są równoliczne,
- baza to maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych w danej przestrzeni, tzn. jeśli do bazy dołączymy dowolny wektor to otrzymany układ wektorów musi być liniowo zależny,
- jeśli $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest bazą i $y_1, y_2, \dots, y_m$ jest dowolnym układem wektorów liniowo niezależnych to $m \leq n$ i wektory $y_1, y_2, \dots, y_m$ można uzupełnić pewnymi $n - m$ elementami spośród $x_1, x_2, \dots, x_n$ do bazy (**twierdzenie Steinitza o wymianie**), zatem każdy liniowo niezależny układ wektorów można uzupełnić do bazy,
- każdy wektor przestrzeni liniowej można przedstawić tylko w jeden sposób jako kombinację liniową wektorów bazy tej przestrzeni.

Przykład

W przestrzeni liniowej R^3 , wektory $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, $z = (0, 1, 1)$ tworzą bazę, bo są liniowo niezależne i jest to maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych w tej przestrzeni.

Przykład

Niech $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e^n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ (w wektorze e^k jedynka znajduje się na k -tej pozycji). Wektory te tworzą bazę przestrzeni liniowej R^n .

Bazę tą nazywamy **bazą standardową** tej przestrzeni.

Jeśli $e^1, e^2, \dots, e^n$ jest bazą standardową w R^n i $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest dowolnym elementem tej przestrzeni to x można zapisać w postaci

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n$$

zatem współrzędne wektora są jednocześnie współczynnikami jego rozwinięcia w bazie standardowej.

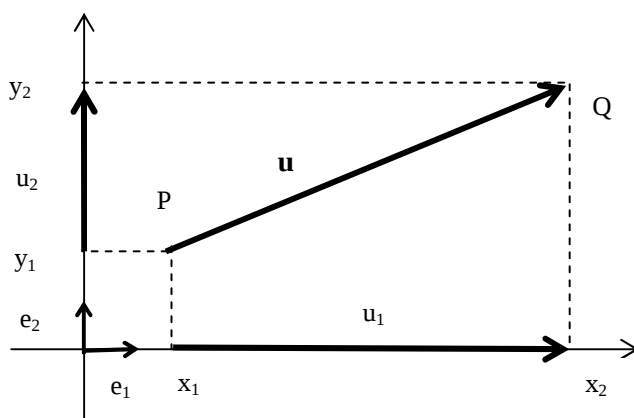
Geometria analityczna w przestrzeni R^2

Rozpatrujemy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych. Punkt $O(0,0)$ jest początkiem tego układu. Będziemy przyjmować **orientację dodatnią** (przeciwną do ruchu wskazówek zegara) układu współrzędnych.

Punkty płaszczyzny utożsamiamy z ich współrzędnymi w tym układzie, czyli parami liczb rzeczywistych, są to więc elementy przestrzeni R^2 . Dowolny punkt P wyznacza wektor swobodny OP .

Wektor swobodny $u = \overrightarrow{PQ}$ w przestrzeni R^2 wyznaczony przez punkty $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, ma współrzędne $u_1 = x_2 - x_1$, $u_2 = y_2 - y_1$ i będziemy stosować zapis $u = [u_1, u_2]$.

Wektory $e_1 = [1, 0]$, $e_2 = [0, 1]$ nazywamy **wersorami** (wektorami jednostkowymi).



Odległość między punktami $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, w tej przestrzeni liczymy wg wzoru:

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Normą (długością) wektora $u = [u_1, u_2]$ nazywamy liczbę:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (u_i)^2}$$

Iloczyn skalarny wektorów $u = [u_1, u_2]$, $v = [v_1, v_2]$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^2 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Dla niezerowych wektorów u, v możemy wyznaczyć cosinus kąta φ między tymi wektorami

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Niezerowy wektor u tworzy z osiami układu współrzędnych kąty φ_1, φ_2 , których cosinusy nazywamy **cosinusami kierunkowymi wektora** u i wyznaczamy na podstawie wzorów

$$\cos \varphi_1 = \frac{u_1}{\|u\|} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{u_2}{\|u\|} = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

Niezerowe wektory u, v są wzajemnie **(prostopadłe) ortogonalne** wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, v \rangle = 0$.

Ponieważ elementy przestrzeni R^2 można utożsamiać z wektorami swobodnymi, to zbiór wektorów swobodnych z powyższym iloczynem skalarnym jest przestrzenią euklidesową. Wersory $e_1 = [1, 0]$, $e_2 = [0, 1]$ stanowią w niej bazę ortonormalną (ortogonalne o długości jednostkowej).

Niezerowe wektory $u = [u_1, u_2]$, $v = [v_1, v_2]$ są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

co jest równoważne warunkowi

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

Przy czym jeśli w mianowniku jest zero to w liczniku też powinno być zero.

Współrzędne punktu $C(c_1, c_2)$ dzielącego odcinek o końcach $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ w stosunku

k , tzn. $\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} = k$ obliczamy z wzorów

$$c_1 = \frac{a_1 + kb_1}{1+k}, \quad c_2 = \frac{a_2 + kb_2}{1+k}$$

Trójkąt o wierzchołkach $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ ma pole

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem punkty A, B, C leżą na jednej prostej gdy

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Prosta w $\mathbb{R}^2$

Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^2$ będziemy traktować jako pary liczb (x, y) i nazywać punktami.

Równanie ogólne prostej.

$$Ax + By + C = 0$$

Uwaga

Wektor $[A, B]$ jest prostopadły do tej prostej i nazywa się, **wektorem normalnym**.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Kąt (ostry) między prostymi $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ wyznaczamy na podstawie cosinusa kąta między ich wektorami normalnymi

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Równanie kierunkowe prostej

$$y = mx + b$$

m - współczynnik kierunkowy

Współczynnik m jest równy tangensowi kąta, który ta prosta tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox .

Dwie proste w postaci kierunkowej $y = m_1x + b_1$ i $y = m_2x + b_2$ są:

a) równoległe gdy

$$m_1 = m_2$$

b) prostopadłe gdy

$$m_1m_2 = -1$$

Kąt między nimi wyznaczamy na podstawie wzoru na tangens różnicy kątów

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} \right|$$

Równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) , (x_0, y_0)

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Równanie parametryczne prostej

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Powyższa prosta przechodzi przez punkt (x_0, y_0) a wektor $[a, b]$ wyznacza kierunek tej prostej.

Równanie odcinkowe prostej

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$(a, 0)$, $(0, b)$ to punkty przecięcia tej prostej z osiami układu współrzędnych

Zbiory wypukłe w $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$).

Zbiór W jest **wypukły** jeśli dla dowolnych $x, y \in W$ i dowolnego $c \in \langle 0, 1 \rangle$ również

$$cx + (1 - c)y \in W$$

Zatem zbiór jest wypukły jeśli dla każdych dwóch różnych punktów należących do tego zbioru, należy do niego cały odcinek którego końcami są te punkty.

Uwaga.

Część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Przykład.

Koło - zbiór wypukły,

Okrąg - nie jest zbiorem wypukłym,

Prosta - zbiór wypukły,

Para przecinających się prostych - nie jest zbiorem wypukłym,

Półpłaszczyzna - zbiór wypukły,

Przykład.

Wyznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność:

- a) $x_1 + 2x_2 \leq 2$;
- b) $-x_1 + x_2 > 0,5$;
- c) $2x_1 - x_2 \geq -1$;
- d) $-2x_1 \leq -1$;
- e) $-x_2 \geq 2$;

Zauważmy, że zbiór rozwiązań układu nierówności liniowych jest albo zbiorem pustym albo zbiorem wypukłym (ograniczonym lub nieograniczonym).

Powyższa własność wynika stąd, że zbiorem rozwiązań układu nierówności liniowych jest część wspólna półpłaszczyzn będących rozwiązaniami poszczególnych nierówności oraz własności: część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Zadanie

Rozwiąż graficznie układ nierówności:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 380 \\ 3x_1 + x_2 \leq 690 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

W przypadku gdy zbiór rozwiązań układu nierówności jest niepusty podaj przykład punktu należącego do zbioru rozwiązań i wyznacz wierzchołki zbioru rozwiązań.

Analityczna metoda rozwiązywania układów nierówności liniowych.

Rozwiązywanie układów nierówności liniowych **sprowadzamy do rozwiązywania układów równości liniowych.**

Do każdej lewej strony nierówności dodajemy (gdy $\leq$) lub odejmujemy (gdy $\geq$) zmienną pomocniczą. Zmienna pomocnicza powinna być zawsze **nieujemna**.

Jako rozwiązanie podajemy współrzędne wierzchołków zbioru rozwiązań, są to rozwiązania bazowe otrzymanego układu równań obcięte do zmiennych występujących w układzie nierówności. Należy pamiętać o **odrzućeniu rozwiązań bazowych w których zmienna pomocnicza jest ujemna**.

Przykład

Wyznaczyć układy równań odpowiadające następującym układom nierówności:

$$\text{(a) } \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \leq 700 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 1280 \end{cases}$$

$$\text{(b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 5x_2 \geq 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$\text{(a) } \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 700 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_4 = 1280 \end{cases}$$

$$\text{(b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ 5x_2 - x_5 = 5 \end{cases}$$

Rozwiązania bazowe układu nieoznaczonego.

Z metody Gaussa wynika istnienie rozwiązania bazowego (pod parametry podstawiamy zera). Rozwiązań bazowych może być wiele. Aby otrzymać inne rozwiązanie bazowe należy przyjąć, że w nowym rozwiązaniu bazowym jeden z dotychczasowych parametrów będzie zmienną bazową a jedna z dotychczasowych zmiennych bazowych będzie parametrem. Następnie pod nowe parametry podstawiamy wartość 0 i rozwiązujemy otrzymany układ równań liniowych.

Możliwe są dwie sytuacje:

- otrzymany układ jest oznaczony i otrzymujemy nowe rozwiązanie bazowe,
- otrzymany układ jest nieoznaczony lub sprzeczny, wtedy należy szukać innego rozwiązania bazowego.

Wszystkich rozwiązań bazowych nie może być więcej niż $\binom{n}{r}$.

Przykład

Rozpatrzmy układ nierówności:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 \geq 2 \end{cases}$$

Rozpatrzmy odpowiadający mu układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ x_2 + x_3 - x_6 = 2 \end{cases}$$

Macierz rozszerzona tego układu jest równa

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

jest to układ nieoznaczony $r = \text{rz}A = \text{rz}M = 2$, $n = 6$.

Przykładowe rozwiązania bazowe:

Niech x_1, x_2 – zmienne bazowe; x_3, x_4, x_5, x_6 – parametry, rozwiązując układ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases} \text{ otrzymamy rozwiązanie bazowe } [6, 2, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Rozpatrzmy nowy układ niewiadomych x_1, x_5 – zmienne bazowe; x_2, x_3, x_4, x_6 – parametry, wtedy odpowiedni układ:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 4 \\ 0 = 2 \end{cases} \text{ jest sprzeczny, zatem układ ten nie daje rozwiązania bazowego.}$$

Rozpatrzmy nowy układ niewiadomych x_1, x_3 – zmienne bazowe; x_2, x_4, x_5, x_6 – parametry, wtedy odpowiedni układ:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \text{ daje rozwiązanie bazowe } [4, 0, 2, 0, 0, 0]^T.$$

Aby wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe należy rozpatrzyć $\binom{6}{2} = 15$ przypadków.

Przykład .

Rozwiązać układ nierówności:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Należy wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe dla układu równań:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Uwaga. Wszystkie 6 możliwości najłatwiej rozpatrzyć wypełniając tabelkę:

	Zmienne bazowe					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Zmienne	$x_1 \ x_2$	$x_1 \ x_3$	$x_1 \ x_4$	$x_2 \ x_3$	$x_2 \ x_4$	$x_3 \ x_4$
x_1				0	0	0
x_2		0	0			0
x_3	0		0		0	
x_4	0	0		0		

Zadanie

Rozwiązać układy nierówności:

$$(a) \quad \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \leq 700 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 1280 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 5x_2 \geq 5 \end{cases}$$

Wskazówka: wyznaczyć wszystkie dopuszczalne rozwiązania bazowe dla układu równań:

$$(a) \quad \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 700 \\ 8x_1 + 16x_2 + x_4 = 1280 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ 5x_2 - x_5 = 5 \end{cases}$$

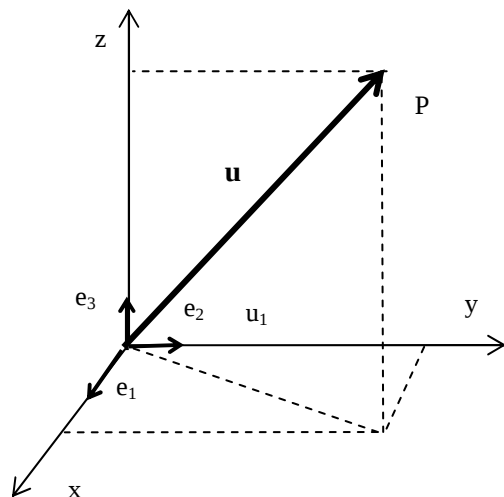
Geometria analityczna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Rozpatrujemy w przestrzeni prostokątny układ współrzędnych. Punkt $O(0,0,0)$ jest początkiem tego układu. Będziemy przyjmować **orientację prawoskrętną** (zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej) układu współrzędnych.

Punkty przestrzeni utożsamiamy z ich współrzędnymi w tym układzie, czyli trójkami liczb rzeczywistych, są to więc elementy przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Dowolny punkt P wyznacza wektor swobodny $\overrightarrow{OP}$.

Wektor swobodny $u = \overrightarrow{PQ}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wyznaczony przez punkty $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, ma współrzędne $u_1 = x_2 - x_1$, $u_2 = y_2 - y_1$, $u_3 = z_2 - z_1$ i będziemy stosować zapis $u = [u_1, u_2, u_3]$.

Wektory $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$ nazywamy **wersorami** (wektorami jednostkowymi).



Odległość między punktami $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, w tej przestrzeni liczymy wg wzoru:

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Normą (długością) wektora $u = [u_1, u_2, u_3]$ nazywamy liczbę:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (u_i)^2}$$

Iloczyn skalarny wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Dla niezerowych wektorów u, v możemy wyznaczyć cosinus kąta φ między tymi wektorami

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Niezerowy wektor u tworzy z osiami układu współrzędnych kąty $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, których cosinusy nazywamy **cosinusami kierunkowymi wektora** u i wyznaczamy na podstawie wzorów

$$\cos \varphi_1 = \frac{u_1}{\|u\|}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{u_2}{\|u\|}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{u_3}{\|u\|}$$

Niezerowe wektory u, v są wzajemnie **(prostopadłe) ortogonalne** wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, v \rangle = 0$.

Ponieważ elementy przestrzeni R^3 można utożsamiać z wektorami swobodnymi, to zbiór wektorów swobodnych z powyższym iloczynem skalarnym jest przestrzenią euklidesową. Wersory $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1]$ stanowią w niej bazę ortonormalną.

Iloczyn wektorowy wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$,

$$u \times v = [u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

(pierwszy wiersz to wersory osi).

Iloczyn wektorowy $u \times v$ jest wektorem prostopadłym do wektorów u, v , jego zwrot jest określony przez regułę śruby prawoskrętnej, a jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach u, v . Zatem połowa jego długości jest równa polu trójkąta rozpiętego na tych wektorach.

Iloczyn mieszany wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$, $w = [w_1, w_2, w_3]$

$$(uvw) = (u \times v) \cdot w = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego wektorów u , v , w jest równa objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach. Zatem objętość czworościanu rozpiętego na tych wektorach jest równa

$$V = \left| \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

Niezerowe wektory $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$ są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 1$$

co jest równoważne warunkowi

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Przy czym jeśli w mianowniku jest zero to w liczniku też powinno być zero.

Niezerowe wektory $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$, $w = [w_1, w_2, w_3]$ są **komplanarne (współpłaszczyznowe)** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0$$

co oznacza zerowanie się ich iloczynu mieszanego.

Prosta i płaszczyzna w $\mathbf{R}^3$

Elementy przestrzeni $\mathbf{R}^3$ będziemy traktować jako trójki liczb (x, y, z) i nazywać punktami.

Równanie ogólne płaszczyzny.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Uwaga

Wektor $[A, B, C]$ jest prostopadły do tej płaszczyzny i nazywa się **wektorem normalnym**.

Kąt (ostry) między płaszczyznami $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ wyznaczamy na podstawie cosinusa kąta między ich wektorami normalnymi

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Odległość punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Korzystając z własności iloczynu mieszanego możemy wyznaczyć **równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch danych nierównoległych wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$**

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Podobnie **równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3)** .

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

Równanie odcinkowe płaszczyzny

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ to punkty przecięcia tej prostej z osiami układu współrzędnych

Równanie kanoniczne prostej.

Prosta przechodząca przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ i równoległa do wektora $u = [u_1, u_2, u_3]$ ma równanie

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Jeśli przyjąć $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} = t$, to po przekształceniu otrzymamy **równanie**

parametryczne prostej

$$x = x_0 + u_1 t, \quad y = y_0 + u_2 t, \quad z = z_0 + u_3 t$$

Równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1, z_1) , (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Ponieważ prosta jest wyznaczona przez dwie nierównoległe płaszczyzny

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, to

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

jest **równaniem krawędziowym prostej**.

Wektor kierunkowy tej prostej jest równy iloczynowi wektorowemu wektorów normalnych rozpatrywanych płaszczyzn.

Odległość punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ od prostej o wektorze kierunkowym $u = [u_1, u_2, u_3]$ i przechodzącej przez punkt $Q(x_1, y_1, z_1)$ wynosi

$$d = \frac{\left\| \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Cosinus kąta między prostą o wektorze kierunkowym $u = [u_1, u_2, u_3]$ a płaszczyzną $Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem

$$d = \frac{|Au_1 + Bu_2 + Cu_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Zadania

Zadanie 1

Punkt $C(2; 3)$ jest środkiem odcinka o końcach A, B . Wiedząc, że $B(7; 5)$, wyznaczyć współrzędne punktu A .

(odp. $A(-3; 1)$)

Zadanie 2

Sprawdzić, że trójkąt o wierzchołkach $A(-3; -3), B(-1; 3), C(11; -1)$ jest prostokątny.

Zadanie 3

Niech $u = [1, -2], v = [1, -1]$. Wyznaczyć $w = 2u - v, \|w\|, \langle u, v \rangle$.

Czy wektory u, v są prostopadłe?

Czy wektory u, v są równoległe?

(odp. nie są prostopadłe, nie są równoległe)

Zadanie 4

Wyznaczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(-2; -4), B(2; 8), C(10; 2)$.

(odp. 60)

Zadanie 5

Dane są trzy kolejne wierzchołki równoległoboku $A(11; 4)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 7)$. Wyznaczyć współrzędne czwartego wierzchołka.

(odp. $D(17; 12)$)

Zadanie 6

Sprawdzić, że punkt $S(s_1, s_2)$ przecięcia środkowych trójkąta o wierzchołkach $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ ma współrzędne

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

Zadanie 7

Dany jest punkt $S(1, 1)$ przecięcia środkowych trójkąta o wierzchołkach $A(3, 8)$, $B(10, 2)$, C . Obliczyć współrzędne wierzchołka C .

(odp. $(-10, -7)$)

Zadanie 8

Punkty o współrzędnych $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$ są środkami boków pewnego trójkąta. Ile wynosi pole tego trójkąta?

(odp. 24)

Zadanie 9

Koszt produkcji K jest liniową funkcją wielkości produkcji P

$$K = e + fP$$

e - koszty stałe,

f - współczynnik kosztów, $f > 0$.

Wiedząc, że koszty stałe są równe 100 oraz, że wzrost produkcji o 100 sztuk powoduje wzrost kosztów o 1000 zł, wyznacz funkcję kosztów.

(odp. $K = 100 + 10P$)

Zadanie 10

Prosta przecina osie układu współrzędnych w punktach $(0, -2)$ i $(6, 0)$.

Wyznaczyć równanie

a) odcinkowe, b) ogólne, c) kierunkowe, d) parametryczne tej prostej.

$$\text{(odp. a) } \frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1, \text{ b) } x - 3y - 6 = 0, \text{ c) } y = \frac{1}{3}x - 2, \text{ d) } \begin{cases} x = 6t + 6 \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R})$$

Zadanie 11

Dana jest prosta $2x - y + 3 = 0$. Sprawdź, które z punktów $A(2, 1)$, $B(-1, -4)$, $C(-1, 1)$, leżą na danej prostej.

(odp. A – nie, B – nie, C – tak)

Zadanie 12

Znaleźć punkty przecięcia prostej $2x - 3y + 6 = 0$ z osiami układu współrzędnych.

(odp. $(-3, 0)$, $(0, 2)$)

Zadanie 13

Prostą o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 4t - 1 \end{cases} \quad t \in R$$

zapisać w postaci ogólnej i kierunkowej.

(odp. $2x + y - 1 = 0$, $y = -2x + 1$)

Zadanie 14

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $(2, 5)$ i $(0, 7)$.

(odp. $x + y - 7 = 0$)

Zadanie 15

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $(-1, 3)$ i $(2, 5)$.

(odp. $2x - 3y + 11 = 0$)

Zadanie 16

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(2, -1)$, równoległej do prostej $2x + 3y + 1 = 0$.

(odp. $2x + 3y - 1 = 0$)

Zadanie 17

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(2, 4)$, prostopadłej do prostej $2x + y - 5 = 0$.

(odp. $x - 2y + 6 = 0$)

Zadanie 18

Wyznacz kąt ostry między prostymi $y = -3x + 7$, $y = 2x + 1$.

(odp. $\pi/4$)

Zadanie 19

Sprawdź, że proste $2x + y - 1 = 0$, $-10x - 5y + 12 = 0$ są równoległe.

Zadanie 20

Sprawdź, że proste $2x + 4y - 1 = 0$, $-4x + 2y + 12 = 0$ są prostopadłe.

Zadanie 21

Wyznacz odległość punktu $A(1, 2)$ od prostej $20x - 21y - 7 = 0$.

(odp. 1)

Zadanie 22

Wyznacz punkt symetryczny do punktu $A(-2, 9)$ względem prostej $2x - 3y + 18 = 0$.

(odp. (2, 3))

Zadanie 23

Wyznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność:

a) $x_1 + 2x_2 \leq 2$;

b) $-x_1 + x_2 > 0,5$;

Zauważ, że zbiorem rozwiązań nierówności liniowej jest zawsze zbiór wypukły - półpłaszczyzna (z brzegiem lub bez brzegu).

Zadanie 24

Rozwiąż graficznie układ nierówności:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 \geq -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

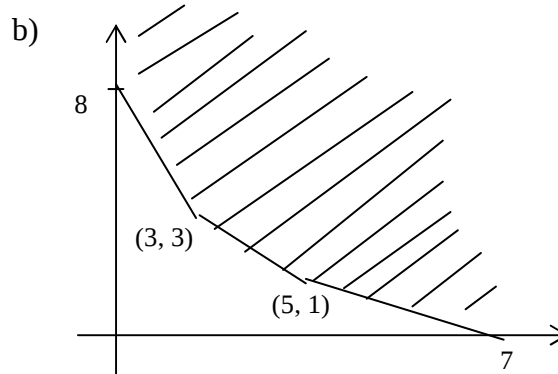
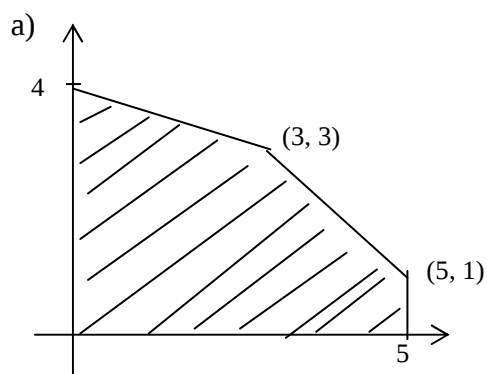
$$\text{c) } \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} -2x_1 - x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

W przypadku gdy zbiór rozwiązań układu nierówności jest niepusty podaj przykład punktu należącego do zbioru rozwiązań i wyznacz wierzchołki zbioru rozwiązań.

Zadanie 25

Dany jest zbiór wypukły:



Wyznacz układ nierówności liniowych, którego rozwiązaniem jest ten zbiór.

Zadanie 26

Niech $u = [-1, 0, 3]$, $v = [0, 2, 1]$. Oblicz iloczyn skalarny tych wektorów.

Czy wektory u , v są prostopadłe?

(odp. 3, nie są prostopadłe)

Zadanie 27

Dla jakiej wartości $c \in \mathbb{R}$ wektory $u = [c, 3, 4]$ i $v = [4, c, -7]$ są prostopadłe.

(odp. $c = 4$)

Zadanie 28

Dla jakiej wartości $c \in \mathbb{R}$ wektory $u = [-1, 2, -2]$ i $v = [c, -4, 4]$ są równoległe.

(odp. $c = -2$)

Zadanie 29

Niech $u = [2, 3, 5]$, $v = [1, 2, 1]$. Oblicz iloczyn wektorowy tych wektorów.

(odp. $[-7, 3, 1]$)

Zadanie 30

Niech $u = [6, 3, -2]$, $v = [3, -2, 6]$. Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach.

(odp. 49)

Zadanie 31

Wyznaczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

(odp. $2\sqrt{6}$)

Zadanie 32

Niech $u = [2, -1, -1]$, $v = [1, 3, -1]$, $w = [1, 1, 4]$. Oblicz iloczyn mieszany tych wektorów.

(odp. 33)

Zadanie 33

Sprawdzić, że dla dowolnych wektorów $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$, $w = [w_1, w_2, w_3]$; wektory $u + v$, $v + w$, $w - u$ są komplanarne.

Zadanie 34

Sprawdzić, że wektory $u = [2, 5, 7]$, $v = [1, 1, -1]$, $w = [1, 2, 2]$ są komplanarne.

Zadanie 35

Wyznaczyć objętość czworościanu o wierzchołkach
A(2; 2; 2), B(4; 3; 3), C(4; 5; 4), D(5; 5; 6).

(odp. 7/6)

Zadanie 36

Wyznacz odległość punktu A(3, 5, -8) od płaszczyzny $6x - 3y + 2z - 1 = 0$.

(odp. 2)

Zadanie 37

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt o współrzędnych (2, 3, 5), prostopadłej do wektora $u = [4, 3, 2]$.

(odp. $4x + 3y + 2z - 27 = 0$)

Zadanie 38

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt o współrzędnych (2, 3, -1), równoległej do płaszczyzny $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

(odp. $5x - 3y + 2z + 1 = 0$)

Zadanie 39

Wyznacz punkt przecięcia płaszczyzny $2x + 3y + z - 1 = 0$ prosta $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$.

(odp. (2, -3, 6))

Zadanie 40

Wyznacz rzut punktu A(2, 3, -6) na płaszczyznę $x + 2y + z + 4 = 0$.

(odp. (1, 1, -7))

Zadanie 41

Wyznacz punkt symetryczny do punktu $A(1, 1, 1)$ względem płaszczyzny $x + y - 2z - 6 = 0$.

(odp. $(3, 3, -3)$)

Zadanie 42

Wyznacz punkt symetryczny do punktu $A(1, 1, 1)$ względem prostej $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

(odp. $(9/7, -4/7, -22/7)$)

Zadanie 43

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(5, 3, 4)$, równoległej do wektora $u = [2, 5, -8]$.

(odp. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-8}$)

Zadanie 44

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(1, 1, 1)$, prostopadłej do wektorów $u = [2, 3, 1]$, $v = [3, 1, 2]$.

(odp. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-7}$)

Zadanie 45

Wyznacz kąt między prostymi

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}, \quad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$$

(odp. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$)

Zadanie 46

Wykazać, że proste

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}, \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

są prostopadłe.

L.Kowalski, 31.03.2010