

CIĄGI LICZBOWE

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb **naturalnych**.

R – zbiór liczb **rzeczywistych** (zbiór reprezentowany przez punkty osi liczbowej).

Nieskończony ciąg liczbowy to przyporządkowanie liczbom naturalnym liczb rzeczywistych.

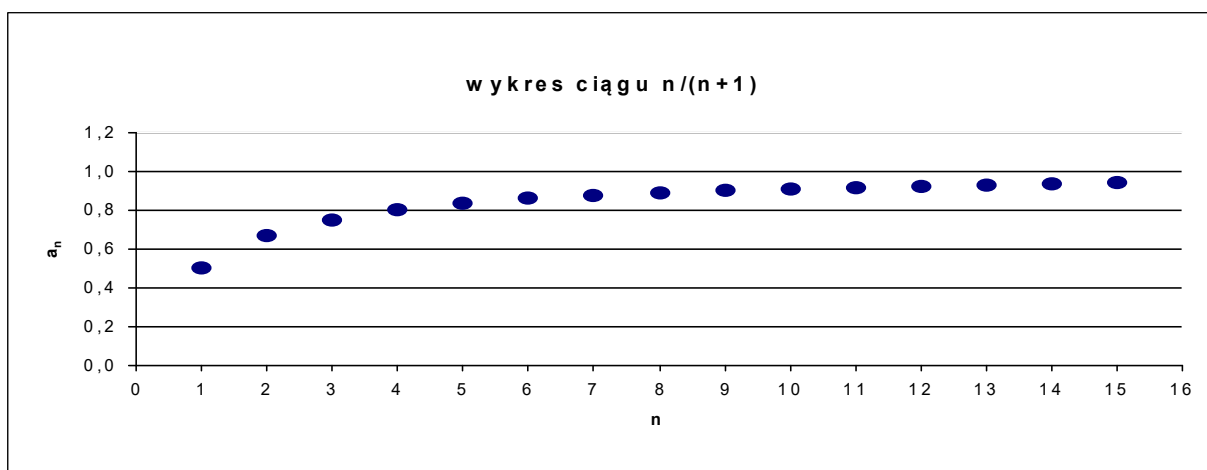
1	2	3	...	n	...
↓	↓	↓		↓	
a_1	a_2	a_3		a_n	

Liczby a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ nazywamy **wyrazami ciągu**. Stosujemy zapis $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, lub oznaczenie (a_n) .

Rozpatrzmy trzy charakterystyczne przykłady ciągów. Pewne własności ciągów można odczytać z ich wykresów.

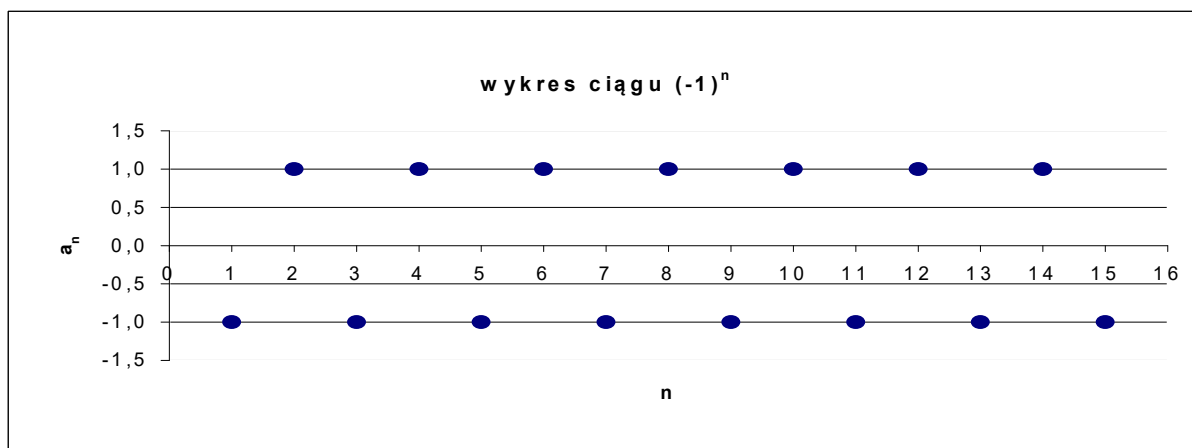
Przykład

$a_n = \frac{n}{n+1}$, zatem początkowe wyrazy wynoszą $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right)$



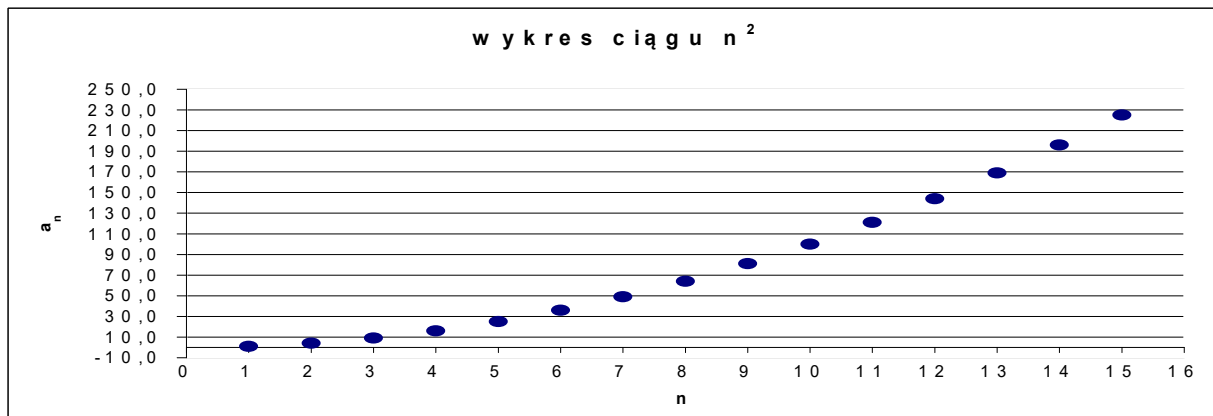
Przykład

$a_n = (-1)^n$, zatem początkowe wyrazy wynoszą $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$



Przykład

$a_n = n^2$, zatem początkowe wyrazy wynoszą (1, 4, 9, 16, 25, 36,...)



Oprócz podania analitycznego wzoru na n – ty wyraz ciągu można je też definiować rekurencyjnie.

Rekurencyjna definicja ciągu - przykłady

1) a_1 - dane,

$$a_{n+1} = a_n + r \quad (r - \text{stała}),$$

w ten sposób definiujemy **ciąg arytmetyczny**

2) a_1 - dane,

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q - \text{stała}),$$

w ten sposób definiujemy **ciąg geometryczny**

3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, **ciąg Fibonacciego**

Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) jest:

- **rosnący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} > a_n$

- **malejący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} < a_n$

- **niemalejący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \geq a_n$

- **nierosnący** gdy $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \leq a_n$

Ciąg jest **monotoniczny** jeśli zachodzi dowolny z powyższych warunków.

W przypadku dwóch pierwszych warunków ciąg **jest ściśle monotoniczny**.

W przypadku dwóch ostatnich warunków ciąg **jest słabo monotoniczny**.

Przykład

Ciąg $a_n = n^2$, jest monotoniczny.

Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest monotoniczny.

Ciągi ograniczone

Ciąg (a_n) jest **ograniczony** gdy $\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq M$

Oznacza to, że dla pewnego M wszystkie wyrazy ciągu spełniają warunek $-M \leq a_n \leq M$, tzn. wykres ciągu można zawrzeć w ograniczonym pasku wyznaczonym przez dwie proste poziome.

Przykład

Ciąg $a_n = n^2$, nie jest ograniczony.

Ciąg $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony.

Granica ciągu.

g - liczba rzeczywista

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ oznacza, że

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} |a_n - g| \leq \varepsilon$$

tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wszystkie wyrazy ciągu o wyrazach większych niż ustalone δ spełniają warunek

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq g + \varepsilon$$

stosujemy też zapis uproszczony:

$$\lim a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow g$$

Przykład

Ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$, jest zbieżny, ma granicę 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy.

Przykład

Na podstawie definicji sprawdź, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Niech $\varepsilon > 0$ to dowolna liczba dodatnia. Wyznamy δ aby dla $n > \delta$ spełniona była

nierówność $|a_n - g| \leq \varepsilon$ czyli $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \leq \varepsilon$.

Jest to równoważne nierówności

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \quad \text{czyli} \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Więc wystarczy przyjąć $\delta = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (lub większą liczbę) aby definicja tej granicy była spełniona.

Granica niewłaściwa ciągu.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oznacza, że

$$\bigwedge_A \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} a_n > A$$

zapis uproszczony:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow \infty$$

Przykład

Ciąg $a_n = n^2$, ma granicę niewłaściwą $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ oznacza, że

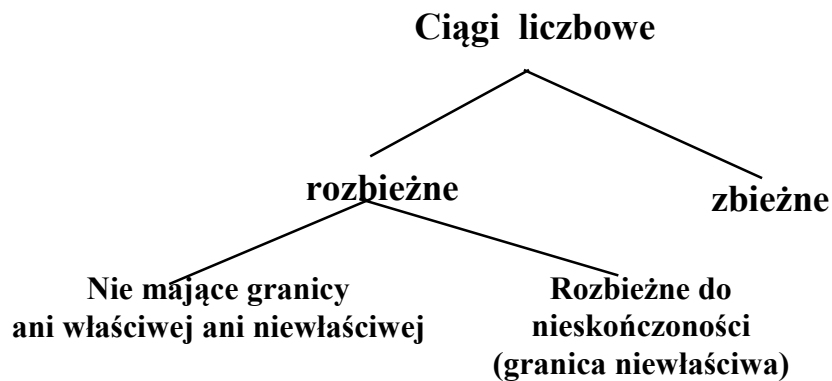
$$\bigwedge_A \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} a_n < A$$

zapis uproszczony:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow -\infty$$

Własność. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = \infty$

Klasyfikacja ciągów:



Własności

- 1) jeśli ciąg jest zbieżny to ma dokładnie jedną granicę,
- 2) ciąg zbieżny jest ograniczony (odwrotna własność nie zachodzi np. $a_n = (-1)^n$),
- 3) ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny,

Rachunek granic skończonych.

Jeśli ciągi (a_n) , (b_n) są zbieżne to:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (b_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0)$$

Symbole nieoznaczone.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Przykłady

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot n \{0 \cdot \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n^2 \{0 \cdot \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot n^2 \{0 \cdot \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Widzimy zatem, że ten sam symbol nieoznaczony może oznaczać różne granice, co uzasadnia jego nazwę.

Podstawowe wzory

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty \quad k - \text{liczba dodatnia,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^k} = 0 \quad k - \text{liczba dodatnia,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Własności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{a_n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 ; (b_n) \text{ ograniczony} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty ; (b_n) \text{ ograniczony} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \pm\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } a_n > 0 \\ -\infty & \text{gdy } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0 \\ -\infty & \text{gdy } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 0 \end{cases}$$

Liczba e (liczba Eulera)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281 \approx 2,72$$

(jest to ciąg rosnący i ograniczony).

Uwaga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \text{gdzie } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$$

Przykład

Rozpatrzmy ciąg zdefiniowany rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

zatem

$$a_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}} = 1,4142...$$

$$a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = 1,5538...$$

$$a_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} = 1,5931...$$

$$a_5 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}} = 1,6119...$$

$$a_6 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}} = 1,6161...$$

itd.

Jeśli $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$ to tzw. "złota liczba" to

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

Uzasadnienie.

Zakładamy, że ciąg a_n jest zbieżny i ma granicę g . Pokażemy, że $g = \varphi$.

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

$$g^2 = 1 + g$$

zatem mamy równość

$$g^2 - g - 1 = 0$$

z której wynika, że $g = \varphi$.

Przykład

Obliczmy $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

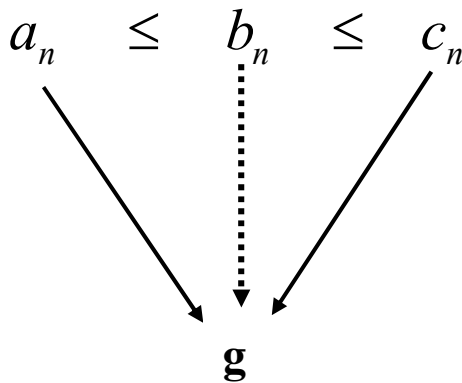
Zatem

$$\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq b_n \leq c_n$

oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$



Przykłady

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^5 + 2n}{2n^5 + 1} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \frac{n^5}{n^5} + 2 \frac{n}{n^5}}{2 \frac{n^5}{n^5} + \frac{1}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^5}} = \frac{6}{2} = 3$

(licznik i mianownik podzieliliśmy przez najwyższą potęgę mianownika tzn. przez n^5)

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 + 2n}{2n^5 + 1} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \frac{n^6}{n^5} + 2 \frac{n}{n^5}}{2 \frac{n^5}{n^5} + \frac{1}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + \frac{2}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^5}} = \frac{\infty}{2} = \infty$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 2n}{2n^5 + 1} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \frac{n^4}{n^5} + 2 \frac{n}{n^5}}{2 \frac{n^5}{n^5} + \frac{1}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} + \frac{2}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^5}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+4}) \{\infty - \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 4}{\sqrt{n} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{n} + \sqrt{n+4}} = \frac{-4}{\infty} = 0$$

Skorzystaliśmy z przekształcenia $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ wynikającego z wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n} - \sqrt{n+4}) \{\infty - \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n - 4}{\sqrt{2n} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 4}{\sqrt{n} + \sqrt{n+4}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$

$$e) \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{n}} - \frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}} + \sqrt{\frac{n+4}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \frac{4}{\sqrt{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} = \frac{\infty}{1 + \sqrt{1}} = \infty$$

(w drugim wierszu licznik i mianownik podzieliliśmy przez najwyższą potęgę mianownika tzn. przez $\sqrt{n}$)

$$f) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{2n+1}{n} = e^2, \quad \text{bo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

$$g) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{3n} \frac{n-2}{3n} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \quad \text{bo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$h) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

$$i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \underline{\underline{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow 3$$

$$\text{Zatem } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$$

(*) Stopa wzrostu ciągu.

(a_n) - ciąg o wyrazach dodatnich.

Stopa wzrostu wyrazu a_n ($n > 1$) to

$$k_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} \quad \text{dla } n = 1 \quad \text{przyjmujemy } k_1 = 0$$

Powyższy wzór można stosować np. do obliczania stóp zwrotu akcji, wtedy ciąg (a_n) to ciąg notowań rozpatrywanych akcji. Stopy zwrotu wyrażamy często w procentach.

Ciąg stały ma zerowe stopy wzrostu.

Ciąg arytmetyczny ma stopy wzrostu dążące do zera.

Ciąg geometryczny ma stałe stopy wzrostu.

Procent prosty.

K_0 - kapitał początkowy,

p - roczna stopa procentowa,

K_n - wartość kapitału po n latach,

Odsetki po każdym roku są stałe i wynoszą $K_0 \frac{p}{100}$ zatem

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{np}{100} \right)$$

Ciąg kapitałów $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym.

Procent składany.

Odsetki po kolejnych latach wynoszą $K_0 \frac{p}{100}, K_1 \frac{p}{100}, K_2 \frac{p}{100}, \dots$ itd.

Zatem

$$K_1 = K_0 + K_0 \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right),$$

$$K_2 = K_1 + K_1 \frac{p}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2,$$

itd.

Ogólnie

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Ciąg kapitałów $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ jest ciągiem geometrycznym.

Jeśli

k = **liczba kapitalizacji** odsetek w ciągu roku

to po n latach wartość kapitału wynosi

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{k100} \right)^{nk}$$

Oprocentowanie ciągłe: ($k \rightarrow \infty$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_n = \lim_{k \rightarrow \infty} K_0 \left(1 + \frac{p}{k100} \right)^{kn} = K_0 e^{\frac{np}{100}}$$

Sumy częściowe ciągu (a_n):

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

Stosujemy zapis:
$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Ciąg (S_n) nazywamy **ciągą sum częściowych**.

Suma ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Przykład

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1+100}{2} 100 = 5050$$

Przykład

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = \frac{2+100}{2} \cdot 50 = 2550$$

Suma ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{gdy } q \neq 1$$

$$S_n = a_1 n \quad \text{gdy } q = 1$$

Przykład

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \frac{1-2^6}{1-2} = 63$$

Przykład

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = \frac{1-10^5}{1-10} = 11111$$

CIAŁGI - zadania

1. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{5-3n}$ [-2]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{-2n^2-1}$ [-0,5]

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^3 + 1}$ [0]

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{16n^2-1}{2n+4n^2}}$ [2]

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{(2n+3)^6}$ [1/64]

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 2n!}{(n+1)! + 3n!}$ [1]

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^n}{3^n + 5^n}$ [-1]

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 999}{2^{n+2} + 9}$ [1/2]

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + (-5)^n}{10^n}$ [0]

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+3}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$ [2]

2. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+8} - \sqrt{n})$ [0]

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$ [0,5]

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 2n})$ $[-1]$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 4n} - n)$ $[0]$

3. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ $[\sqrt{e}]$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{6n}$ $[e^3]$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{8n}$ $[e^{-4}]$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+3}{2}}$ $[\sqrt{e}]$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n+3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ $[e^{-0,75}]$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^n$ $[1]$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n+3}\right)^{8n}$ $[e^4]$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2-5}$ $[e^{-2}]$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{4n}$ $[e^{-8}]$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2}$ $[e^5]$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{4n}$ $[e^{-1}]$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{2n^2}$ $[e^{-2}]$

4. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n+2}$ $[\infty]$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{(n+2)^4}$ $[0]$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n}$ $[1]$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{1+2+3+\dots+n}$ $[4]$

5. Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+9^n+7^n}$ $[9]$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3+5n^6}$ $[1]$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{1+n}$ $[1]$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3+n}$ $[1]$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{11^n+12^n+10^n}$ $[12]$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n + 5n}{10n-1}$ $[0,5]$

(*) SZEREGI LICZBOWE.

Szereg liczbowy to nieskończony ciąg sum częściowych:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Przykład.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Przykład.

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Przykład.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny** jeśli ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny. W przeciwnym przypadku mówimy, że szereg jest **rozbieżny**.

Wtedy $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nazywamy sumą szeregu.

Przykład.

Szereg $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ jest zbieżny ma sumę równą 1.

Przykład.

Szereg $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ jest rozbieżny.

Przykład

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Wyraz n -ty ciągu sum częściowych tego szeregu można przekształcić następująco:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

a więc rozpatrywany szereg jest zbieżny i jego suma wynosi 1

Warunek konieczny zbieżności szeregu:

Twierdzenie.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Dowód

$$\text{Zauważmy, że } a_n = S_{n-1} - S_n$$

gdzie S_{n-1} i S_n oznaczają odpowiednio $(n-1)$ -szą i n -tą resztę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0,$$

a zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n-1} - S_n) = 0$$

Uwaga.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ spełnia warunek konieczny lecz nie jest zbieżny.

Szereg geometryczny.

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad q = \text{const}$$

Suma szeregu geometrycznego.

$$\text{Gdy } |q| < 1 \text{ to } S = \frac{a}{1-q}$$

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8}$$

Przykład

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad \text{szereg zbieżny}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{szereg zbieżny}$$

Przykład.

Stosując wzór na sumę ciągu geometrycznego można zamieniać ułamki okresowe na zwykłe.

$$0,27272727\dots = 0(27) = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + \dots = \frac{0,27}{1 - 0,01} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Szereg harmoniczny rzędu r.

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

Twierdzenie.

Szereg harmoniczny rzędu $r > 1$ jest zbieżny.

Szereg harmoniczny rzędu $r \leq 1$ jest rozbieżny.

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{jest zbieżny (} r = 2 > 1 \text{)}$$

Przykład.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{jest rozbieżny (} r = 0,5 < 1 \text{)}$$

Definicja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{- dany szereg.}$$

Jeśli $\bigwedge_{n \in N} a_n \leq b_n$ to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{nazywamy majorantą szeregu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Jeśli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} c_n \leq a_n$ to szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nazywamy **minorantą** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Kryteria zbieżności szeregów = warunki dostateczne zbieżności szeregu.

Zakładamy, że $a_n \geq 0$.

Kryterium porównawcze.

Majoranta danego szeregu zbieżna $\Rightarrow$ dany szereg zbieżny.

Minoranta danego szeregu rozbieżna $\Rightarrow$ dany szereg rozbieżny.

Przykład.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ jest zbieżny, bo ma majorantę zbieżną

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (r = 2 > 1)$$

Kryterium ilorazowe (d'Alemberta).

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$

Jeśli $g > 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,

Jeśli $g < 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

Jeśli $g = 1$ to kryterium ilorazowe nie rozstrzyga o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykład.

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a_n = \frac{n^n}{n!},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1 \end{aligned}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ jest zatem rozbieżny na mocy kryterium ilorazowego.

Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego).

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$

Jeśli $g > 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,

Jeśli $g < 1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

Jeśli $g = 1$ to kryterium pierwiastkowe nie rozstrzyga o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykład.

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}$, $a_n = \frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(\sqrt[n]{n})^2}{n} = 0 < 1$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 5^n}{n^n}$ jest zatem zbieżny na mocy kryterium pierwiastkowego.

Szeregi o wyrazach dowolnych

Definicja

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (a_n > 0)$$

nazywamy **szeregiem naprzemiennym**.

Wyrazy tego szeregu są na przemian dodatnie i ujemne.

Kryterium Leibniza.

Jeżeli

- ciąg (a_n) jest nierosnący, tzn.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$
- oraz $\lim a_n = 0$

to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.

Przykład

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

jest zbieżny, ponieważ spełnia założenia kryterium Leibniza:

- jest to szereg naprzemienny, $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$
- dla każdego n mamy $a_{n+1} \leq a_n$, gdyż $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$.

Można udowodnić, że suma S szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \equiv 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ równa jest $\ln 2$.

Przykład

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^3} \equiv 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$ jest zbieżny na podstawie kryterium Leibniza.

Definicja

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**, jeżeli jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Przykład

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza.

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} \right| \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

także jest zbieżny, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$

jest zbieżny bezwzględnie.

Twierdzenie

Jeśli szereg jest zbieżny bezwzględnie to jest zbieżny.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe:

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza.

Natomiast szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right| \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, jest rozbieżny.

Przykład

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}{n^3}$.

Rozważmy szereg utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}{n^3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} |\sin \sqrt{n}|}{n^3}$$

do którego możemy zastosować kryterium porównawcze.

Ponieważ dla każdego naturalnego n

$$\frac{\sqrt{n} |\sin \sqrt{n}|}{n^3} \leq \frac{1}{n^{5/2}},$$

więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} |\sin \sqrt{n}|}{n^3}$ jest zbieżny.

Na podstawie twierdzenia wynika stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}{n^3}$

jest zbieżny i to bezwzględnie.

Definicja szeregu zbieżnego warunkowo

Szereg zbieżny lecz nie bezwzględnie zbieżny nazywamy szeregiem **zbieżnym warunkowo**.

Przykład

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+4}{4n+2} \right)^n$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym, ponieważ szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+4}{4n+2} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{4n+2} \right)^n$ jest szeregiem zbieżnym, co wynika z kryterium

Cauchy'ego. Istotnie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+4}{4n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1$, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+4}{4n+2} \right)^n$ na mocy twierdzenia jest zbieżny.

Przykład

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ nie jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym, bo szereg jego

bezwzględnych wartości $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ jest szeregiem harmonicznym rzędu $\frac{1}{2}$,

więc jest szeregiem rozbieżnym.

Z kryterium Leibniza wynika natomiast, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny ponieważ

ciąg $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest ciągiem malejącym dążącym do zera.

Więc szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest warunkowo zbieżny.

Przykład 14. Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ jest szeregiem warunkowo zbieżnym.

Przykład

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym, ponieważ szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ jest zbieżny, co wynika z kryterium d'Alemberta. Istotnie

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{4} < 1$. Więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{(2n)!}$ jest zbieżny.

Twierdzenie

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to dla dowolnej permutacji $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ liczb

naturalnych szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$ jest zbieżny i ma taką samą sumę jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Twierdzenie Riemanna

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym. Dla dowolnego $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ istnieje

permutacja $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zbioru liczb naturalnych taka, że A jest sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$.

SZEREGI - zadania

1. Wyznacz sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$ [3]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ [1,5]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n + 9 \cdot 4^n}{5^n}$.

1a. Wykazać, że dane szeregi są rozbieżne (nie spełniają warunku koniecznego zbieżności):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 1}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+10}{2n+3}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+2}$.

2. Stosując kryterium porównawcze zbadaj zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+2}{n^2+1}$ [rozb.]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2+1}$ [zb.]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\dots+n}{n^4}$ [zb.]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\dots+n}{2+n^3}$ [rozb.]

2a. Stosując kryterium porównawcze zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$.

3. Stosując kryterium ilorazowe zbadaj zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$ [rozb.]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^6}$ [rozb.]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ [zb.]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)5^n}{(2n)!}$ [zb.]

3a. Stosując kryterium ilorazowe zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!},$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{9^n}$$

4. Stosując kryterium pierwiastkowe zbadać zbieżność szeregu:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^6} \quad [\text{rozb.}] \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} \quad [\text{rozb.}]$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{2^{n+2}} \quad [\text{rozb.}] \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^{n+2}}{n^{5n} 2^n} \quad [\text{zb.}]$$

4a. Stosując kryterium pierwiastkowe zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}.$$

5. Zbadaj zbieżność szeregu. Dla szeregów zbieżnych należy ustalić, czy zbieżność jest warunkowa czy bezwzględna.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\sqrt{5n}} \quad [\text{zb. war.}] \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\sqrt[n]{5n}} \quad [\text{rozb.}]$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n\sqrt{5n}} \quad [\text{zb. bezwzgl.}] \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)} \quad [\text{zb. war.}]$$

Uwaga. ad. d) $\ln(n+1) < n+1$