

GRANICA FUNKCJI

Granica funkcji.

x_0 - dowolna liczba rzeczywista.

$O(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ - **otoczenie** liczby (punktu) x_0 o promieniu ε ,

$S(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ - **sąsiedztwo** liczby (punktu) x_0 o promieniu ε ,

Niech funkcja f będzie określona w sąsiedztwie (punktu) x_0 , g niech będzie liczbą lub $+\infty$, lub $-\infty$.

Definicja granicy funkcji (wg Heinego).

Granica funkcji f w punkcie x_0 jest równa g , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji, zbieżnego do x_0 , o wyrazach **różnych od x_0** , ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji ma granicę równą g .

Zapis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

Analogicznie określamy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$$

i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$$

Definicja granicy funkcji (wg Cauch'ego).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Uwaga.

- powyższe definicje granicy funkcji są równoważne,
- rachunek granic skończonych jak dla granic ciągów,
- symbole nieoznaczone jak dla granic ciągów.

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Granice jednostronne funkcji.

Niech funkcja f będzie określona w lewostronnym sąsiedztwie (punktu) x_0 , g niech będzie liczbą lub $+\infty$, lub $-\infty$.

Definicja.

Granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0 jest równa g , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji, zbieżnego do x_0 , o wyrazach mniejszych od x_0 , ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji ma granicę równą g .

Zapis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = g \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = g$$

Analogicznie określamy granicę prawostronną:

Zapis:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = g \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = g$$

Twierdzenie.

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g wtedy i tylko wtedy gdy istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 i są one równe g tzn.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = g \wedge \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = g \right)$$

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \text{granice jednostronne są różne}$$

zatem $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ nie istnieje.

Niektóre granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1, \text{ gdzie } k - \text{stała } \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \text{ gdzie } k - \text{stała},$$

Funkcja ciągła.

Funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 jest ciągła w punkcie x_0 , gdy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Analogicznie określamy **jednostronną ciągłość** funkcji.

Funkcja f jest **ciągła w przedziale**, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja jest **ciągła** gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykład

$$\text{Funkcja } f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{nie jest ciągła dla } x = 0, \text{ granica jest inna niż wartość}$$

funkcji w tym punkcie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$. Jest to przykład **nieciągłości usuwalnej**.

Przykład

$$\text{Funkcja } f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{nie jest ciągła dla } x = 0, \text{ granice jednostronne w tym}$$

punkcie, chociaż istnieją i są właściwe, to są różne. Jest to przykład **nieciągłości I rodzaju**.

Przykład

$$\text{Funkcja } f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{nie jest ciągła dla } x = 0, \text{ nie istnieją nawet granice}$$

jednostronne funkcji w tym punkcie. Jest to przykład **nieciągłości II rodzaju**.

Przykład (funkcja Dirichleta)

$$\text{Funkcja } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \text{ wymierne} \\ 0 & \text{gdy } x \text{ niewymierne} \end{cases} \quad \text{nie jest ciągła w żadnym punkcie.}$$

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to:

- funkcje $f+g$, $f-g$ są ciągłe w punkcie x_0 ;
- funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0 ;

c) funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0 , o ile $g(x_0) \neq 0$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla funkcji ciągłych jednostronnie.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ,
 2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,
- to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0 .

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła i rosnąca na przedziale $[a, b]$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest ciągła i rosnąca na przedziale $[f(a), f(b)]$.

Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla funkcji malejącej.

Uwaga

Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie (o monotoniczności funkcji ciągłej i różnowartościowej)

Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Wówczas, funkcja f jest różnowartościowa na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest malejąca albo rosnąca na tym przedziale.

Twierdzenie.

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale wartość najmniejszą i wartość największą.

Twierdzenie (własność Darboux).

Zakładamy, że funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$.

Jeśli $f(a) \neq f(b)$ oraz $f(a) \leq g \leq f(b)$ lub $f(b) \leq g \leq f(a)$

to istnieje $c \in \langle a, b \rangle$, że $f(c) = g$.

Wniosek. Jeśli $f(a)$, $f(b)$ mają różne znaki to istnieje $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.

Powyższy wniosek pozwala w prosty sposób wyznaczać przybliżone miejsce zerowe dowolnej funkcji ciągłej w danym przedziale, (jeśli istnieje) należy dzielić dany przedział na podprzedziały na końcach których funkcja ma różne znaki np. metodą połowienia.

Asymptoty.

Asymptota pionowa.

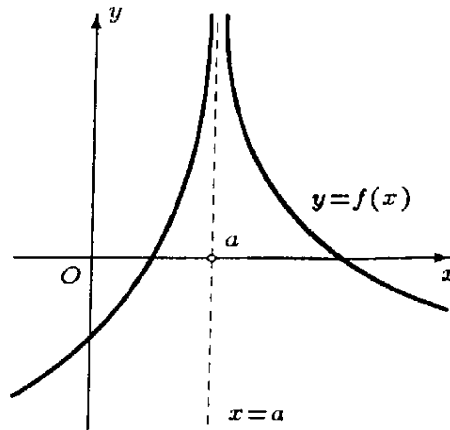
Prosta $x = a$ jest **pionową asymptotą prawostronną** funkcji f jeśli funkcja f jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu a oraz

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$$

Prosta $x = a$ jest **pionową asymptotą lewostronną** funkcji f jeśli funkcja f jest określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$$

Prosta $x = a$ jest **pionową asymptotą obustronną** funkcji f jeśli ta prosta jest pionową asymptotą prawostronną i jest pionową asymptotą lewostronną funkcji f .



asymptota pionowa

Asymptota pozioma.

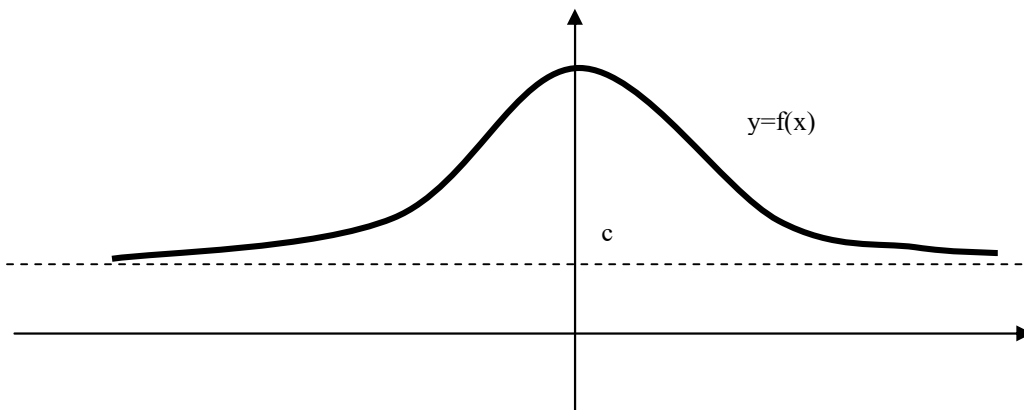
Prosta $y = c$ jest **poziomą asymptotą prawostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$$

Prosta $y = c$ jest **poziomą asymptotą lewostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$$

Prosta $y = c$ jest **poziomą asymptotą obustronną** funkcji f jeśli ta prosta jest poziomą asymptotą prawostronną i jest poziomą asymptotą lewostronną funkcji f .



asymptota pozioma

Asymptota ukośna.

Prosta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) jest **ukośną asymptotą prawostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$$

Prosta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) jest **ukośną asymptotą lewostronną** funkcji f jeśli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$$

Prosta $y = ax + b$ ($a \neq 0$) jest **ukośną asymptotą obustronną** funkcji f jeśli ta prosta jest ukośną asymptotą prawostronną i jest ukośną asymptotą lewostronną funkcji f .

Uwaga.

Dla dużych $|x|$ wartość funkcji w punkcie x jest w przybliżeniu równa $ax + b$ tzn.:

$$f(x) \cong ax + b$$

GRANICA FUNKCJI - zadania

1. Na podstawie definicji granicy

a) Heinego wykaż, że $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2 - x} = -4$

b) Cauchy'ego wykaż, że $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2 - x} = -12$

2. Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}$ [-12]

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 4x + 5}{4x^2 + 8x + 1}$ [- 0,5]

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 6x + 3}}$ [1]

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ [3]

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ [1]

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 4x}$ [0,5]

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^x - 2^x}{3^x + 6 \cdot 4^x}$ [0,5]

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 4x + 5}{4x^3 + 8x + 1}$ [0]

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ [1/3]

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^4 + 4x + 5}{4x^3 + 8x + 1}$ [∞]

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ [2]

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$ [2]

3. Oblicz granice jednostronne funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ dla $x = 2$ [$f(2-) = -\infty$, $f(2+) = \infty$]

b) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ dla $x = 2$ [$f(2-) = \infty$, $f(2+) = -\infty$]

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ dla $x = 0$ [$f(0-) = 0$, $f(0+) = \infty$]

d) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ dla $x = 0$ [$f(0-) = \infty$, $f(0+) = 0$]

4. Wyznacz asymptoty funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ [$x = 3$, $y = 2$]

b) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 7}{x+2}$ [$x = -2$, $y = 2x - 1$]

$$\text{c) } f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2} \quad [x = -2, x = 1, y = 4x - 2]$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad [y = -x, y = x]$$

$$\text{e) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad [x = 0, y = 1]$$

5. Sprawdź, że funkcja f jest ciągła:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 - x^2 & |x| > 1 \end{cases}$$

6. Sprawdź, że funkcja f nie jest ciągła:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ 4 - x^2 & |x| > 1 \end{cases}$$

7. Dla jakiej wartości parametru k funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x + k & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad [1]$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2k & x \leq 1 \\ \sqrt{x} & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad [0]$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + k & x \geq 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad [1]$$