

POCHODNA FUNKCJI.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x ,
 $h \neq 0$ takie że $x + h$ należy do tego otoczenia.

x - argument wyjściowy,

$f(x)$ - wyjściowa wartość funkcji,

h - przyrost argumentu,

$f(x + h)$ - końcowa wartość funkcji,

$f(x + h) - f(x)$ = przyrost funkcji,

$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ - iloraz różnicowy,

Definicja.

Pochodna funkcji f w punkcie x to granica ilorazu różnicowego gdy przyrost argumentu dąży do zera (o ile granica ta istnieje).

Zapis:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

inne oznaczenie:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Podobnie można zdefiniować pochodne jednostronne (należy rozpatrywać jednostronne granice ilorazu różnicowego).

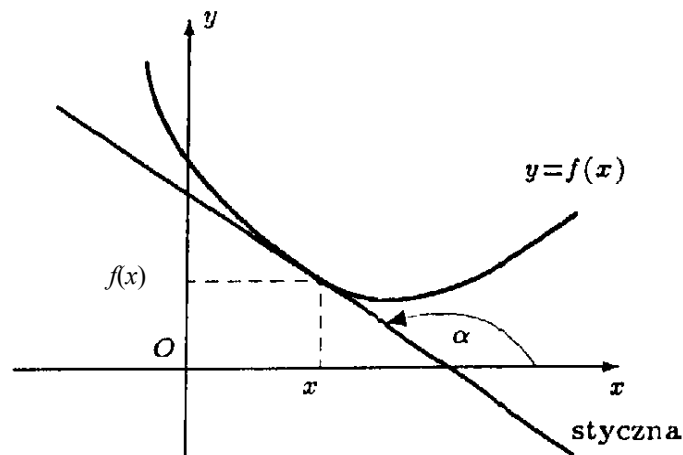
Pochodną równą $\pm \infty$ nazywamy niewłaściwą.

Interpretacja pochodnej.

Interpretacja geometryczna.

$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ gdzie α jest kątem nachylenia stycznej w punkcie $(x, f(x))$ do osi OX .

(dlatego $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej dla $x = 0$, (brak stycznej))



Przyrost wartości funkcji jest proporcjonalny do pochodnej.

Dla małych (bliskich 0) h mamy

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{stąd} \quad f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$$

zatem przyrost funkcji odpowiadający małemu przyrostowi argumentu h jest wprost proporcjonalny do h , a współczynnikiem proporcjonalności jest $f'(x)$.

Interpretacja fizyczna.

1. Jeśli $y(t)$ określa położenie punktu na osi w chwili t , to iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ jest prędkością średnią a pochodna $y'(t)$ jest prędkością chwilową.
2. Jeśli $v(t)$ określa prędkość punktu w chwili t , to iloraz różnicowy $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ jest przyspieszeniem średnim a pochodna $v'(t)$ jest przyspieszeniem chwilowym.

Różniczkowalność = istnienie pochodnej,

Różniczkowalność w przedziale = różniczkowalność w każdym punkcie tego przedziału.

Uwaga.

Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x to f jest ciągła w tym punkcie.
(odwrotna własność nie jest prawdziwa np. $f(x) = |x|$).

Rachunek pochodnych:

f, g - różniczkowalne w punkcie x , c - stała,

$$(cf)' = cf'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad (\text{pochodna sumy (różnicy) funkcji})$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\text{pochodna iloczynu funkcji})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (\text{pochodna ilorazu funkcji})$$

$$\text{Jeśli } f = g(h) \text{ to } f' = g'(h) \cdot h' \quad (\text{pochodna funkcji złożonej})$$

Podstawowe wzory.

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{w szczególności } (c)' = 0, (x)' = 1, (x^2)' = 2x, \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(e^x)' = e^x, \quad \text{ogólnie} \quad (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{ogólnie} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Przykład.

$$(a) \quad (2x^3 - 5x^2 + 7x + 4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + (4)' = 6x^2 - 10x + 7$$

$$(b) \quad (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = x e^x (x + 2)$$

$$\left(\frac{2x+3}{x^2+2x-3} \right)' = \frac{(2x+3)'(x^2+2x-3) - (2x+3)(x^2+2x-3)'}{(x^2+2x-3)^2} =$$

(c)

$$= \frac{2(x^2+2x-3) - (2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{-2x^2-6x-12}{(x^2+2x-3)^2}$$

(d) $\left((2x^3+5)^4 \right)' = 4(2x^3+5)^3 (2x^3+5)' = 24x^2(2x^3+5)^3$

(e) $(x^x)' = \{a^b = e^{b \ln a}\} = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Niech

1. funkcja f będzie ciągła na przedziale (a,b) ,
2. funkcja f będzie malejąca albo rosnąca na przedziale (a,b) ,
3. $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a,b)$.

Wtedy funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wzór ten jest prawdziwy także dla pochodnych jednostronnych właściwych i niewłaściwych.

Uwaga

Pochodne funkcji elementarnych są funkcjami elementarnymi.

Zestawienie pochodnych

Funkcja	Pochodna
c (c - stała)	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x$	$\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Własności pochodnej

$(cf)'(x) = cf'(x)$ c - stała
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ gdzie $y_0 = f(x_0)$
$(f^g)' = (e^{g \ln f})'$
$(\log_f g)' = \left(\frac{\ln g}{\ln f}\right)'$

POCHODNA - zadania

1. Oblicz pochodną funkcji:

- | | |
|---|----------------------------------|
| a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4$ | $[6x^2 - 10x]$ |
| b) $f(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 4$ | $[1 - x - x^2 + x^3]$ |
| c) $f(x) = x^3(x^2 - 1)^2$ | $[3x^2 - 10x^4 + 7x^6]$ |
| d) $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$ | $[x^2 e^x]$ |
| e) $f(x) = x \ln x - x$ | $[\ln x]$ |
| f) $f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$ | $\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]$ |

g) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$	$\left[\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \right]$
h) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$	$\left[\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \right]$
i) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$	$\left[\frac{7}{8} x^{\frac{1}{8}} \right]$

2. Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$	$\left[\frac{1}{\sqrt{2x+3}} \right]$
b) $f(x) = \sin^3 x$	$[3\sin^2 x \cos x]$
c) $f(x) = \cos^5 x$	$[-5\cos^4 x \sin x]$
d) $f(x) = \sin 6x$	$[6\cos 6x]$
e) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$	$\left[\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \right]$
f) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\left[\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \right]$
g) $f(x) = \ln \frac{3-x^2}{2-x^2}$	$\left[\frac{2x}{x^4 - 5x^2 + 6} \right]$
h) $f(x) = x^{x^2}$	$[x^{x^2+1}(1+2\ln x)]$
i) $f(x) = x^{\ln x}$	$[x^{\ln x-1} \ln x]$

3. Oblicz (korzystając z definicji) pochodną funkcji:

a) $f(x) = x^3 + x$	$[3x^2 + 1]$
b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$	$\left[\frac{-1}{(x+1)^2} \right]$
c) $f(x) = x + \frac{2}{x}$	$\left[\frac{x^2-2}{x^2} \right]$