

ZASTOSOWANIA POCHODNEJ

Reguła de l'Hospitala.

Twierdzenie.

Niech f, g - różniczkowalne w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 oraz

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

$$2) \text{ istnieje skończona lub niewłaściwa granica } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wtedy
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwaga.

Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w nieskończonościach.

Uwaga.

Powyższe twierdzenie stosuje się tylko w przypadku symboli nieoznaczonych $\left[\frac{0}{0} \right]$ i $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^7 + 2x^5 + 64}{x^6 - 64} \left\{ \frac{0}{0} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-7x^6 + 10x^4}{6x^5} = -1,5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = e^0 = 1$$

Monotoniczność funkcji.

Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$ to $f(x)$ jest **rosnąca** w przedziale (a, b) ,

Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$ to $f(x)$ jest **malejąca** w przedziale (a, b) ,

Jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$ to $f(x)$ jest **stała** w przedziale (a, b) ,

Ekstremum funkcji.

Funkcja f ma w x_0 **maksimum** jeśli w pewnym otoczeniu tego punktu $f(x) < f(x_0)$ ($x \neq x_0$).

Funkcja f ma w x_0 **minimum** jeśli w pewnym otoczeniu tego punktu $f(x) > f(x_0)$ ($x \neq x_0$).

Ekstremum = maksimum lub minimum.

Ekstremum nie musi pokrywać się z wartością największą (najmniejszą) funkcji w przedziale.

Warunek konieczny ekstremum.

Jeśli funkcja f ma w x_0 ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna to

$$f'(x_0) = 0$$

Uwaga.

- 1) odwrotne twierdzenie nie zachodzi (np. $y = x^3$),
- 2) funkcja która nie jest różniczkowalna może mieć ekstremum (np. $y = |x|$),

Warunek dostateczny ekstremum.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Jeśli f jest :

- ciągła w x_0
- rosnąca (malejąca) w lewostronnym sąsiedztwie x_0
- malejąca (rosnąca) w prawostronnym sąsiedztwie x_0

wtedy f ma w x_0 maksimum (minimum).

Warunek dostateczny ekstremum funkcji różniczkowalnej.

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		max	

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		min	

Przykład.

Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = e^{-x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$, funkcja f jest parzysta.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

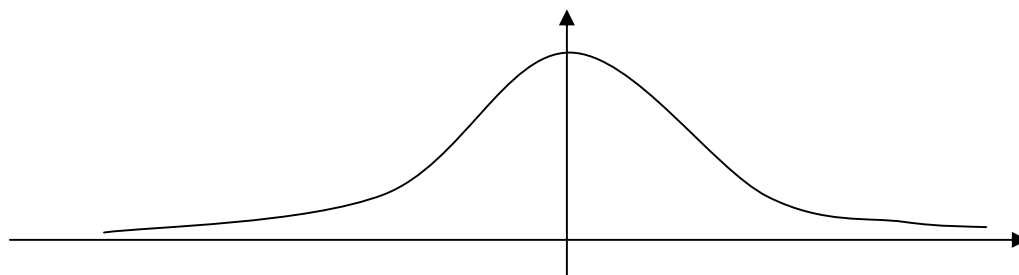
x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		max $f_{\max} = f(0) = 1$	

Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$

oraz

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$

Zatem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną.



Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji ciągłej w przedziale domkniętym $[a, b]$:

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ osiąga wartość największą i wartość najmniejszą. Wartości te mogą być przyjmowane przez funkcję f jedynie na końcach przedziału lub w takich punktach przedziału (a, b) w których pochodna $f'(x)$ jest równa zero lub nie istnieje.

Przykład.

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 e^x$ w przedziale $[-3, 3]$.

Rozwiązanie:

Pochodna $f'(x) = x(x+2)e^x$ ma miejsca zerowe $x = 0$ i $x = -2$.

Zatem wartość największa to $\max(f(-3), f(3), f(0), f(-2)) = 9e^3$.

Zatem wartość najmniejsza to $\min(f(-3), f(3), f(0), f(-2)) = 0$.

Twierdzenie (Rolle'a)

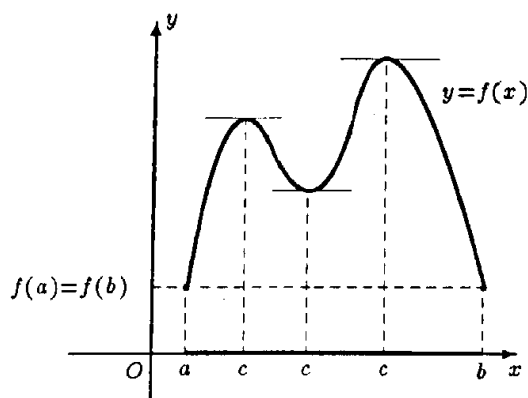
Jeśli

1. funkcja f jest ciągła na $[a, b]$
2. funkcja f ma pochodną na (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Wtedy istnieje $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, różniczkowalnej we wnętrzu tego przedziału i przyjmującej jednakowe wartości na jego końcach istnieje punkt, w którym styczna jest pozioma.



Twierdzenie (Lagrange'a)

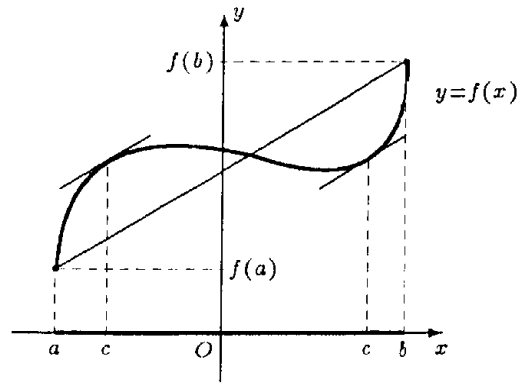
Jeśli

- a) funkcja f jest ciągła na $[a, b]$
- b) funkcja f ma pochodną na (a, b)

Wtedy istnieje $c \in (a, b)$, że $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym i różniczkowalnej na wnętrzu tego przedziału istnieje punkt, w którym styczna do wykresu jest równoległa do secznej łączącej końce wykresu.



Pochodna rzędu drugiego (druga pochodna)

$$f''(x) = (f')'$$

tzn. pochodna rzędu 2 jest pochodną pochodnej rzędu 1.

Inne oznaczenie: $\frac{d^2 f}{dx^2}$

Przykład:

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - 4x^2 + 3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 8x$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x - 8$$

Uwaga.

Funkcja f jest klasy C^0 w przedziale (a, b) jeśli jest ciągła w tym przedziale.

Funkcja f jest klasy C^1 w przedziale (a, b) jeśli f' istnieje i jest ciągła w tym przedziale.

Funkcja f jest klasy C^2 w przedziale (a, b) jeśli f'' istnieje i jest ciągła w tym przedziale.

Zastosowania f''

Warunek dostateczny ekstremum.

Twierdzenie.

Niech f będzie klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) \neq 0$ to f ma w x_0 ekstremum.

Przy czym jest to

minimum gdy $f''(x_0) > 0$

maksimum gdy $f''(x_0) < 0$

Uwaga.

Jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) = 0$ to powyższe twierdzenie nie rozstrzyga o istnieniu w x_0 ekstremum.

Wypukłość funkcji.

Funkcja f różniczkowalna w (a, b) jest **wypukła ku dołowi (wypukła)** w (a, b) jeśli styczna do wykresu w punkcie $(x, f(x))$ dla $a < x < b$ leży poniżej wykresu funkcji.

Funkcja f różniczkowalna w (a, b) jest **wypukła ku górze (wklęsła)** w (a, b) jeśli styczna do wykresu w punkcie $(x, f(x))$ dla $a < x < b$ leży powyżej wykresu funkcji.

Twierdzenie.

Niech f będzie klasy C^2 w (a, b) .

Jeśli $f''(x) < 0$ dla $a < x < b$ to f jest **wypukła ku górze** w (a, b) (**wklęsła**).

Jeśli $f''(x_0) > 0$ dla $a < x < b$ to f jest **wypukła ku dołowi** w (a, b) (**wypukła**).

Przykład.

Dla funkcji $f(x) = x^2$, mamy $f''(x) = 2 > 0$, zatem jest to funkcja wypukła.

Dla funkcji $f(x) = -x^2$, mamy $f''(x) = -2 < 0$, zatem jest to funkcja wklęsła.

Punkt przegięcia.

Niech f będzie ciągła w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

$(x_0, f(x_0))$ jest **punktem przegięcia** jeśli f jest wypukła ku górze w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 i f jest wypukła ku dołowi w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0 lub odwrotnie.

Twierdzenie.

Niech f będzie klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Jeśli $f''(x_0) = 0$ oraz $f''(x)$ zmienia znak w x_0 to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia.

Przykład.

Dla funkcji $f(x) = x^3$, mamy $f''(x) = 6x$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

oraz $f''(x) < 0$ dla $x < 0$, $f''(x) > 0$ dla $x > 0$

zatem punkt $(0,0)$ jest to funkcja wypukła.

ZASTOSOWANIA POCHODNEJ - zadania

3. Wyznacz ekstrema funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$

[brak ekstr.]

b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

$[y_{\max} = y(1) = 4, y_{\min} = y(5) = -28]$

c) $f(x) = (x-4)^4(x+3)^3$

$[y_{\max} = y(0) = 4^4 3^3, y_{\min} = y(4) = 0]$

d) $f(x) = x \ln x$

$[y_{\min} = y(1/e) = -1/e]$

e) $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

[brak ekstr.]

f) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{3}$

$[y_{\max} = y(-1) = 0,5, y_{\min} = y(2) = -4]$

g) $f(x) = 16x(x-2)^3$

$[y_{\min} = y(0,5) = -27]$

h) $f(x) = 4x - 5\sqrt[5]{x^4}$

$[D = \mathbb{R}, y_{\max} = y(0) = 0, y_{\min} = y(1) = -1]$

4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale:

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ dla $x \in \langle -4, 4 \rangle$

$[f(-4) = -271, f(1) = 4]$

b) $f(x) = x \ln x$

dla $x \in \langle 1, e \rangle$

$[f(1) = 0, f(e) = e^2]$

c) $f(x) = 3x - x^3$

dla $x \in \langle -2, 3 \rangle$

$[f(3) = -18, f(1) = f(-2) = 2]$

5. Oblicz drugą pochodną funkcji:

- | | |
|---|------------------------|
| a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4$ | $[12x - 10]$ |
| b) $f(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 4$ | $[-1 - 4x + 9x^2]$ |
| c) $f(x) = x^3(x^2 - 1)^2$ | $[6x - 40x^3 + 42x^5]$ |
| d) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$ | $[6x]$ |

6. Wyznacz punkty przegięcia funkcji:

- | | |
|--------------------------------|-------------|
| a) $f(x) = x^5$ | $[(0, 0)]$ |
| b) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$ | $[(0, -2)]$ |
| c) $f(x) = (x - 4)^5 + 4x + 4$ | $[(4, 20)]$ |

7. Oblicz granice stosując regułę de l'Hospitala:

- | | | | |
|--|---------|---|----------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}$ | $[-12]$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$ | $[0, 6]$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^5}$ | $[0]$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$ | $[0]$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ | $[1]$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 4x}$ | $[0, 5]$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ | $[2]$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ | $[0, 5]$ |

8. Zbadaj funkcje i narysuj ich wykresy:

- $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$
- $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$
- $f(x) = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$
- $f(x) = 4x - 5\sqrt[5]{x^4}$
- $f(x) = 16x(x - 2)^3$

9. Liczbę 64 rozłożyć na dwa dodatnie czynniki aby ich suma kwadratów była maksymalna.

10. Objętość walca wynosi V. Wyznaczyć promień R podstawy tego walca aby pole powierzchni całkowitej było minimalne.