

CAŁKA NIEOZNACZONA

f - funkcja określona w przedziale E .

Funkcją pierwotną funkcji f w przedziale E nazywamy funkcję F taką, że

$$F'(x) = f(x) \quad \bigwedge_{x \in E}$$

Np. funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x + 3$ $x \in \mathbb{R}$

jest funkcja $F(x) = x^2 + 3x$ bo $F'(x) = 2x + 3$,

Zauważmy, że funkcje $F(x) = x^2 + 3x + 5$ i $F(x) = x^2 + 3x - 2$ też są funkcjami pierwotnymi tej funkcji.

Ogólnie $F(x) = x^2 + 3x + C$ gdzie C - dowolna stała, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x + 3$.

Twierdzenie.

Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale E to każda funkcja pierwotna ma postać $\Phi(x) = F(x) + C$.

Całką nieoznaczoną funkcji f w przedziale E jest zbiór jej wszystkich funkcji pierwotnych czyli zbiór $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f .

Stosujemy zapis:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Całkowanie = obliczanie całki nieoznaczonej.

Twierdzenie.

Jeśli f jest ciągła w E to istnieje w tym przedziale całka nieoznaczona funkcji f .

Podstawowe wzory:

$$\int 0 dx = C \quad \int dx = x + C \quad \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

Inne wzory.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C \quad \int \tg x dx = -\ln|\cos x| + C \quad \int \ctg x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\ctg x + C$$

Przykład.

$$\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$$

Własności.

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx \quad \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Przykład.

$$\int 6x^2 - 4x + 3 dx = 6 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 3 \int dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$$

Przykład.

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx - \int x^{-\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + C$$

Całkowanie przez części.

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Przykład.

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = x \quad f'(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \quad f(x) = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = e^x (x - 1) + C$$

Przykład.

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \ln x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$$

Całkowanie przez podstawianie.

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Wnioski.

$$1) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$2) \quad \text{Jeśli } \int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{to} \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Przykład.

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ dx = \frac{1}{\cos x} dt \end{array} \right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

Przykład.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln|\cos x| + C$$

Przykład.

$$\int \cos(2x - 5) dx = \frac{1}{2} \sin(2x - 5) + C$$

Przykład.

$$\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{1}{3} \frac{2}{3} (3x+2)^{3/2} + C = \frac{2}{9} (3x+2) \sqrt{3x+2} + C$$

Całkowanie przez rozkład na ułamki proste.

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx = \int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)} dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-2} dx = \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C$$

CAŁKA OZNACZONA

Podziałem odcinka $[a,b]$ na n części nazywamy zbiór

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Oznaczenia

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – długość k -tego odcinka podziału P , $1 \leq k \leq n$;

$\delta(P) = \max \{\Delta x_k: 1 \leq k \leq n\}$ – średnica podziału P ;

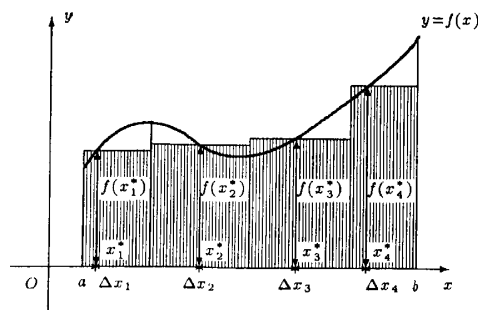
$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, punkt pośredni k -tego odcinka podziału P , $1 \leq k \leq n$.

Def. (suma całkową)

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$ oraz niech P będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi P odcinka $[a,b]$ oraz punktom pośrednim x_k^* , $1 \leq k \leq n$ tego podziału nazywamy liczbę

$$\sigma(f, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Suma całkową jest przybliżeniem pola obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią Ox i prostymi $x = a$, $x = b$ przez sumę pól prostokątów o podstawach Δx_k i wysokościach $f(x_k^*)$, $1 \leq k \leq n$.



Def (całka oznaczona Riemanna)

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$. Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a,b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k,$$

o ile granica po prawej stronie znaku równości istnieje oraz nie zależy od sposobu podziałów P przedziału $[a,b]$ ani od sposobów wyboru punktów pośrednich x_k^* , $1 \leq k \leq n$. Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{oraz} \quad \int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_a^b f(x) dx \quad \text{dla } a < b.$$

Funkcję, dla której istnieje całka oznaczona Riemanna na $[a,b]$ nazywamy funkcją całkowalną na $[a,b]$. Zamiast symbolu $\int_a^b f(x)dx$ można pisać $\int_{[a,b]} f(x)dx$ lub krótko $\int_a^b f$ albo też $\int_{[a,b]} f$.

Zauważmy, że całka oznaczona jest liczbą!

Uwaga. Każda funkcja całkowalna jest ograniczona, ale nie każda funkcja ograniczona na przedziale jest na tym przedziale całkowalna (np. funkcja Dirichleta).

Tw. (warunek wystarczający całkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a,b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości I rodzaju, to jest na nim całkowalna.

Uwaga. Z powyższego twierdzenia wynika, że funkcja ciągła na przedziale jest na tym przedziale całkowalna. Z drugiej strony funkcja całkowalna na przedziale może mieć nieskończenie wiele punktów nieciągłości. Przykładem takiej funkcji jest

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \lfloor x^{-1} \rfloor^{-1} & \text{dla } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Funkcja f jest całkowalna na przedziale $[0,1]$, ale w punktach $x = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$ jest nieciągła.

Całka oznaczona funkcji ciągłej.

f - funkcja określona i ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$.

$$\int_a^b f(x)dx = (F(x)) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

gdzie F - funkcja pierwotna funkcji f w tym przedziale.

Uwaga.

Przyjmuje się, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Przykład.

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x - 2)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Uwaga. (własności całki oznaczonej)

1) addytywność względem przedziałów całkowania

Jeśli $c \in \langle a, b \rangle$ to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2) równość całek

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz niech funkcja g różni się od funkcji f tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału. Wtedy funkcja g także jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

3) zachowanie nierówności przy całkowaniu

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

4) całka funkcji nieparzystej

Niech funkcja f będzie nieparzysta i całkowalna na przedziale $[-a, a]$. Wtedy

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

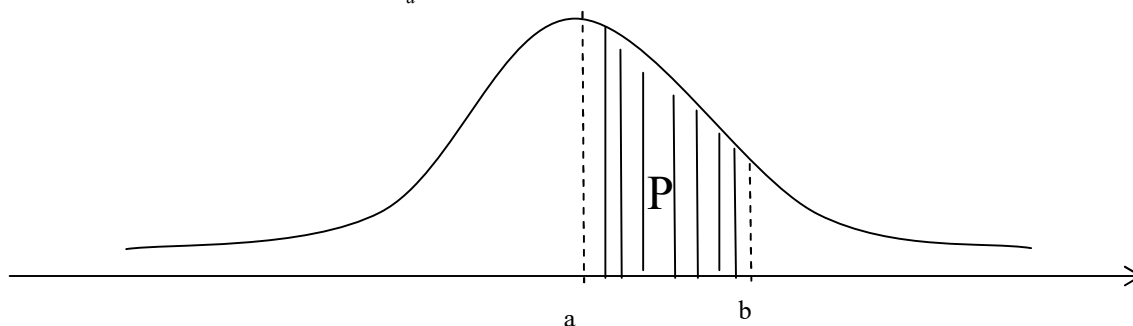
5) całka funkcji parzystej

Niech funkcja f będzie parzysta i całkowalna na przedziale $[-a, a]$. Wtedy

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

6) Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

Jeśli $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a, b]$ to $\int_a^b f(x)dx = P$ (pole obszaru pod krzywą f dla $x \in [a, b]$).



7) Średnia całkowita.

$$\bar{f}_c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Tw (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli

1. funkcja $\varphi: [\alpha, \beta] \xrightarrow{na} [a, b]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha, \beta]$,
 2. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
 3. funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$,
- to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Uwaga. W przypadku gdy funkcja φ jest rosnąca, ostatni wzór można zapisać w postaci:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Tw. (o całkowaniu przez części)

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

ZASTOSOWANIA CAŁEK OZNACZONYCH

Pole trapezu krzywoliniowego

Niech funkcje d i g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $d(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$. Pole trapezu krzywoliniowego P ograniczonego wykresami funkcji d i g oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx.$$

Długość krzywej

Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Długość krzywej $L = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Objętość bryły obrotowej

Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Ponadto niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a$, $x = b$, gdzie $a < b$. Objętość bryły V powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Pole powierzchni obrotowej

Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Pole powierzchni S powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Ox wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Przykład.

Koszt całkowity wyprodukowania x sztuk towaru wyraża się wzorem:

$$K(x) = 0,04x^3 - 3x^2 + 100x - 80$$

Jaki jest średni koszt produkcji jeśli produkcja wynosiła 10 i wzrosła do 20 sztuk.

Rozwiązanie: Średni koszt produkcji wyznaczamy jako średnią całkową kosztów.

$$\bar{K}_c = \frac{1}{20 - 10} \int_{10}^{20} K(x)dx = \frac{1}{10} (0,01x^4 - x^3 + 50x^2 - 80x) \Big|_{10}^{20} =$$

$$= 0,1(1600 - 8000 + 20000 - 1600 - 100 + 1000 - 5000 + 800) = 870$$

Zauważmy, że $K(10) = 660$, $K(20) = 1040$, $\bar{K} = 850$.

Przykład.

Obliczyć pole obszaru zawartego między krzywymi: $f_1(x) = x^2 - 2$ i $f_2(x) = x$

$$P = \int_{-1}^2 (x - (x^2 - 2))dx = 4,5$$

Całka niewłaściwa (nieograniczony zakres całkowania).

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx, \quad c - \text{ustalona liczba, np. } c = 0.$$

Jeśli rozpatrywana granica nie istnieje lub nie jest skończona, to mówimy, że **całka jest rozbieżna**.

Przykład.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^b = 1$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = (\arctg x) \Big|_{-\infty}^\infty = \pi$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|x|) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty \quad (\text{całka rozbieżna})$$

Funkcja górnej granicy całkowania.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad x \in \langle a, b \rangle$$

- jest ciągła w $\langle a, b \rangle$,
- jeśli f ciągła to F jest różniczkowalna oraz $F'(x) = f(x)$.

UZUPEŁNIENIE

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

Funkcję wymierną $W(x) = \frac{L(x)}{M(x)}$ nazywamy **właściwą**, gdy stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Uwaga. Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{A}{(x+a)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, A \in \mathbb{R}$, nazywamy **ułamkiem prostym pierwszego rodzaju**.

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $p, q, P, Q \in \mathbb{R}$ oraz $\Delta = p^2 - 4q < 0$, nazywamy **ułamkiem prostym drugiego rodzaju**.

Tw. (o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)

Niech W będzie funkcją wymierną właściwą oraz niech mianownik tej funkcji ma rozkład na czynniki postaci: $(x - a_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - a_r)^{n_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}$,
gdzie $r, s \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq r$ oraz $m_j \in \mathbb{N}$, $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $\Delta_j = p_j^2 - 4q_j < 0$ dla $1 \leq j \leq s$.

Wtedy

$$\begin{aligned} W(x) = & \left[\frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{n_1}}{(x - a_1)^{n_1}} \right] + \\ & + \left[\frac{B_1}{(x - a_2)} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{B_{n_2}}{(x - a_2)^{n_2}} \right] + \dots \\ & + \left[\frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{P_2x + Q_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{P_{m_1}x + Q_{m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} \right] + \\ & + \left[\frac{R_1x + S_1}{(x^2 + p_2x + q_2)} + \frac{R_2x + S_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{R_{m_2}x + S_{m_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2}} \right] + \dots \end{aligned}$$

gdzie $A_1, \dots, B_1, \dots, P_1, Q_1, \dots, R_1, S_1, \dots$ są odpowiednio dobranymi liczbami rzeczywistymi. Inaczej mówiąc, każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju.

całkowanie ułamków prostych

Ułamki proste pierwszego rodzaju
$\int \frac{A dx}{x + a} = A \ln x + a + C$
$\int \frac{A dx}{(x + a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x + a)^{n-1}} + C, n > 1$
Ułamki proste drugiego rodzaju
$\int \frac{(Px + Q) dx}{x^2 + px + q} = \frac{P}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2Q - pP}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$
$\int \frac{(Px + Q) dx}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{P}{2(1-n)} (x^2 + px + q)^{1-n} + \frac{2Q - pP}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}, n > 1$

Przykład

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x}{a} + C$$

CAŁKOWANIE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

całkowanie funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$

Niech $R(u, v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych.

W zależności od warunków jakie spełnia funkcja R , stosujemy podstawienie podane w tabeli:

Warunek	Podstawienie	Przedstawienie funkcji	Różniczka
$R(-u, v) = -R(u, v)$	$t = \cos x$	$\sin x = \sqrt{1 - t^2}$	$dx = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$
$R(u, -v) = -R(u, v)$	$t = \sin x$	$\cos x = \sqrt{1 - t^2}$	$dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$
$R(-u, -v) = R(u, v)$	$t = \operatorname{tg} x$	$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$	$dx = \frac{dt}{1 + t^2}$
Podstawienie uniwersalne	$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

Przykład

$$\int \sin ax \cos bxdx = \frac{-1}{2(a+b)} \cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x$$

$$\int \sin ax \sin bxdx = \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x$$

$$\int \cos ax \cos bxdx = \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x$$

Przykład (całki z ważniejszych funkcji trygonometrycznych)

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = -\ln|\sin x| + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

CAŁKOWANIE FUNKCJI NIEWYMIERNYCH

Przykład (ważniejsze całki z funkcji niewymiernych)

Wzór	Założenia
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$ x < a$
$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln x + \sqrt{x^2 + a^2} + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + C$	$ x > a$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 + a^2} + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + C$	$ x > a$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$	$ x \leq a$

CAŁKA - zadania

Zadanie 1.1. Oblicz całki

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) $\int \frac{1-x}{x^3} dx;$ | $\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C \right]$ |
| b) $\int \sqrt[3]{\frac{1}{x}} dx;$ | $\left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C \right]$ |
| c) $\int \frac{-1+x}{x^2} dx;$ | $\left[\frac{1}{x} + \ln x + C \right]$ |
| d) $\int \frac{1}{(7x+1)^3} dx$ | $\left[\frac{-1}{14(7x+1)^2} + C \right]$ |
| e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$ | $\left[-\sqrt{1-2x} + C \right]$ |
| f) $\int x e^{-x} dx$ | $\left[-(x+1)e^{-x} + C \right]$ |
| g) $\int x^2 e^x dx$ | $\left[(x^2 - 2x + 2)e^x + C \right]$ |

$$\text{h) } \int \ln \sqrt{x} dx \quad \left[x \ln x - 0,5x + C \right]$$

$$\text{i) } \int \frac{3x}{2\sqrt{x+1}} dx \quad \left[(x-2)\sqrt{x+1} + C \right]$$

$$\text{j) } \int e^{\sqrt{x}} dx \quad \left[(\sqrt{x}-1)2e^{\sqrt{x}} + C \right]$$

$$\text{k) } \int \frac{2x+1}{x^2+x-12} dx \quad \left[\ln|x-3| + \ln|x+4| + C \right]$$

$$\text{l) } \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx \quad \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{0,25}{x-1} - \frac{0,25}{x+1} + C \right]$$

Zadanie 1.2. Oblicz a) $\int \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{x}} dx$; b) $\int x e^{3x} dx$ c) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ d) $\int (4x+1)^9 dx$

e) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ f) $\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2} dx$

Odp. a) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) + C$; b) $\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C$; c) $\frac{-1}{2(x^2+1)} + C$;

d) $\frac{1}{40} (4x+1)^{10} + C$; e) $\frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C$;

f) $\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$;

Zadanie 1.3. Całkując przez części, wyznacz następujące całki:

a) $\int x e^{2x} dx$ b) $\int x \cos 3x dx$ c) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ d) $\int x \sqrt{x+1} dx$

Odp. a) $\frac{1}{4} (2x-1)e^{2x} + c$ b) $\frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c$

c) $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$ d) $\frac{2}{15} (3x-2)(x+1)^{3/2} + c$

Zadanie 1.4. Korzystając z podanych podstawień, wyznacz następujące całki:

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ $t = \sqrt{x}$ b) $\int \sin \ln x dx$ $t = \ln x$

c) $\int \frac{1}{(1+x)^2} dx$ $t = 1+x$ d) $\int x \sqrt{x+1} dx$ $t = \sqrt{x+1}$

Odp. a) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+c$ b) $\frac{1}{2}x(\sin \ln x - \cos \ln x) + c$
 c) $\frac{-1}{1+x} + c$ d) $\frac{2}{15}(3x^2+x-2)\sqrt{x+1} + c$

Zadanie 2.1. Oblicz całki oznaczone:

a) $\int_1^2 (4x^3+1)dx;$ [16]
 b) $\int_1^2 \frac{x dx}{x^2+1};$ [ln $\sqrt{2,5}$]
 c) $\int_0^2 (1+e^{2x})dx$ [0,5(3 + e⁴)]

Zadanie 2.2. Oblicz: a) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1};$ b) $\int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$

Odp. a) ln2; b) 1,75

Zadanie 3.1. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = x^2$; $y = 4$ [10 $\frac{2}{3}$]
 b) $y = x^2$; $y = 0,5x^2 + 2$ [5 $\frac{1}{3}$]
 c) $y = e^x$; $y = 2$, $x = 0$ [ln 4 – 1]

Zadanie 3.2. Oblicz pole powierzchni ograniczonej wykresami funkcji

a) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{4}x$, b) $y = -x^2 + 3x + 1$, $y = x^2 - 2x - 2$
Odp. a) $1/6 + \ln 2$, b) $14\frac{7}{24}$

Zadanie 3.3. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = x^2 - 2x$; $y = x$ b) $y = -x^2 + 8x$; $y = x^2 - 4x$

Odp. a) 4,5 b) 72

Zadanie 4.1. Oblicz całki niewłaściwe:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$; [2]

b) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$ [- 1]

Zadanie 4.2. Oblicz całki niewłaściwe: a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

Odp. a) rozbieżna b) 2

Zadanie 5. Popyt na pewien towar jest funkcją ceny c $p(c) = \frac{c}{2c^2 + 1}$.

Obliczyć średnią wartość popytu jeżeli cena wzrośnie od 4 do 5 jednostek.

Odp. $\bar{p}_c = \frac{1}{4} \ln \frac{17}{11}$

Zadanie 6. Wydajność robotnika wyraża się wzorem $w(t) = 12 + t - \frac{1}{6}t^2$ jednostek na

godzinę (t - czas od rozpoczęcia pracy liczony w godzinach). Wyznacz liczbę jednostek wytworzonych przez robotnika w ciągu 8 godzin pracy.

Odp. około 99,6 jednostki (wskazówka: oblicz całkę $\int_0^8 w(t) dt$)

Zadanie 7. Zapas Z ton pewnego towaru w magazynie zmienia się w ciągu miesiąca (30 dni) i po upływie t dni (licząc od początku miesiąca) wyraża się wzorem

$$Z(t) = 0,01t^3 + 0,15t^2 - 18t + 300.$$

W którym momencie zapas towaru jest najmniejszy? Jaki jest średni zapas w ciągu miesiąca?

Odp. $Z_{\min} = Z(20) = 8$, $\bar{Z}_c = 142,5$.

Zestawienie całek nieoznaczonych

Funkcja	Całka nieoznaczona
0	C
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$

a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc} \sin x + C$

Własności całek nieoznaczonych

$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$
$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + C$
$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$
$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$ (całkowanie przez części)
$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ (całkowanie przez podstawianie)
W szczególności Jeśli $\int f(x) dx = F(x) + C$ to $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$