WŁASNOŚCI MACIERZY

Własności iloczynu i transpozycji

a) mnożenie macierzy jest łączne, tzn. A(BC) = (AB)C, dlatego zapis ABC jest jednoznaczny,

b) mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania,
tzn. A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC,

c) mnożenie macierzy nie jest przemienne,

d) AI = A, IA = A, o ile wymiary macierzy umożliwiają mnożenie,

e) $(AB)^T = B^T A^T$,

f) (A + B)T = AT + BT,

g) $(A^T)^T = A$,

h) $(cA)^T = cA^T$, c - stała

i) tr(AB) = tr(BA), tr(A + B) = trA + trB.

Własności wyznacznika

a) $\det A = \det A^T$

b) jeśli macierz A jest stopnia n, to dla dowolnej stałej a mamy $\det(aA) = a^n \det A$

c) $\det AB = \det A \det B$

d) dla macierzy nieosobliwej A mamy $\det A^T A > 0$,

e) jeśli w macierzy A jest wiersz (kolumna) złożony z samych zer to $\det A = 0$,

f) jeśli w macierzy A są jednakowe wiersze (kolumny) to $\det A = 0$,

g) jeśli wiersz (kolumnę) macierzy A pomnożymy przez dowolną liczbę rzeczywistą to wyznacznik powstałej macierzy będzie równy wyznacznikowi macierzy A pomnożonemu przez tę liczbę,

h) jeśli w macierzy A zamienimy miejscami dwa wiersze (kolumny) to wyznacznik powstałej macierzy będzie równy -det$A$,

i) wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli do pewnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę różną od zera.

j) wyznacznik macierzy trójkątnej (pod przekątną same zera) jest równy iloczynowi elementów na przekątnej.

Własności macierzy odwrotnej

a) macierzą odwrotną do macierzy jednostkowej jest ta sama macierz tzn. $I^{-1} = I$,

b) $\left(\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left((a_{11})^{-1}, (a_{22})^{-1}, \ldots, (a_{nn})^{-1}\right)$

c) $(A^{-1})^{-1} = A$,

d) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,

e) $(cA)^{-1} = c^{-1}(A)^{-1}$, c - stała

f) $(AB)^{-1} = (B)^{-1}(A)^{-1}$,

g) det (A^{-1}) = (detA)$^{-1}$.

h) macierz odwrotna do nieosobliwej macierzy symetrycznej jest symetryczna,

i) macierz odwrotna do nieosobliwej macierzy trójkątnej jest trójkątna,

Własności rzędu macierzy.

a) Rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej,

b) Rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n,

c) Rząd macierzy A^T jest równy rzędowi macierzy A,

d) Rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy,

e) Jeśli macierz kwadratowa jest nieosobliwa to jej rząd jest równy stopniowi tej macierzy,

f) Jeśli dowolny wiersz macierzy pomnożymy przez stałą różną od zera i dodamy do innego wiersza to rząd macierzy nie ulegnie zmianie.
Jeśli zamienimy dwa wiersze między sobą miejscami to rząd macierzy nie ulegnie zmianie.
Podobne operacje można wykonywać na kolumnach macierzy.

g) Jeśli wykreślimy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer to rząd nie ulegnie zmianie.

Potęga macierzy

Jeśli A jest macierzą kwadratową to $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n}$. $A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot ... \cdot A^{-1}}_{n} = \left(A^{-1}\right)^n$

Ślad macierzy

Jeśli A jest macierzą kwadratową to trA = suma elementów na przekątnej.

Macierz diagonalna o danych elementach: $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$

Macierze blokowe

Niekiedy wygodnie jest podzielić macierz na bloki, czyli podmacierze które powstają z danej macierzy przez odrzucenie pewnej liczby początkowych i końcowych wierszy i kolumn.

W naturalny sposób można określić podział na bloki za pomocą linii poziomych i pionowych, np.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

macierz A składa się z czterech bloków.

Macierz kwadratowa jest blokowo – diagonalna gdy wszystkie bloki leżące poza główną przekątną są podmacierzami zerowymi, tzn.

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

a bloki na przekątnej są kwadratowe.

Dodawanie i mnożenie macierzy blokowych, jeżeli podział na bloki jest odpowiedni wykonujemy wg zwykłych zasad, traktując bloki jak elementy macierzy, np.

A = $\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$; B = $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$;

Wtedy $AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 \\ A_3B_1 + A_4B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 0 + 0B_2 \\ 0 \cdot 0 + IB_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Wyznacznik macierzy blokowo-diagonalnej jest równy iloczynowi wyznaczników bloków znajdujących się na przekątnej, tzn.

$$\det\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_k \cdot$$

Jeśli A = $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$ i macierze A_1, A_4 są kwadratowe, to detA = detA_1 detA_4.

Jeśli A = $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$ i macierze A_1, A_4 są kwadratowe, nieosobliwe, to $A^{-1} = \begin{bmatrix} (A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (A_4)^{-1} \end{bmatrix}$.

Jeśli A = $\begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ i macierz B jest dowolna o wymiarach (*n* x *m*), to $A^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$.

Wartości własne macierzy

A - dowolna macierz kwadratowa stopnia r.

Wielomianem charakterystycznym tej macierzy nazywamy wielomian

$$W(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Równanie $W(\lambda) = 0$ nazywamy **równaniem charakterystycznym**. Pierwiastki tego równania to **wartości własne** lub pierwiastki charakterystyczne tej macierzy.

Niech $\lambda_1, ..., \lambda_k$ - wartości własne macierzy A o krotnościach $\alpha_1, ..., \alpha_k$ $(k \le r)$.

Przykład.

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ma równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

i wartości własne: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

Przykład.

Macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ma równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$$

i wartości własne: $\lambda_1 = 2 + i2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2 - i2\sqrt{2}$.

Wektorem własnym operatora f odpowiadającym wartości własnej λ nazywamy niezerowy wektor v spełniający warunek $f(v) = \lambda v$.

Własność:

a) suma wartości własnych (z krotnościami) jest równa śladowi macierzy tzn. sumie elementów jej przekątnej.
b) macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy zero jest jej wartością własną,
c) macierz jest pierwiastkiem własnego równania charakterystycznego,
d) macierz symetryczna ma tylko rzeczywiste wartości własne,
e) jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to $c\lambda$ jest wartością własną macierzy cA,
f) jeśli $\lambda \neq 0$ jest wartością własną macierzy A, to $1/\lambda$ jest wartością własną mac. A^{-1},
g) jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to λ^m jest wartością własną mac. A^m, $m \in N$

h) jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to λ jest wartością własną macierzy A^T,

i) jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to λ jest wartością własną macierzy $S^{-1}AS$, dla dowolnej macierzy nieosobliwej S tego samego stopnia co A.

Własności macierzy stochastycznych.

Własność

Średnia arytmetyczna i iloczyn dwóch macierzy stochastycznych tego samego stopnia są także macierzami stochastycznymi.

Własności macierzy stochastycznych:

a) Wartością własną każdej macierzy stochastycznej jest $\lambda = 1$ (oznaczamy $\lambda_1 = 1$),

Dowód.

Dodajemy wszystkie kolumny macierzy $(\lambda I - A)$ do pierwszej kolumny, sumy wierszy są równe 1 więc po dodaniu wszystkie elementy pierwszej kolumny są równe $\lambda - 1$ i można tą wartość wyłączyć przed wyznacznik.

b) Moduły wszystkich wartości własnych dowolnej macierzy stochastycznej są mniejsze od 1,

c) (tw. Dooba) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^k = A$,

Macierz A ma własność PA = AP = A = A^2 (macierz idempotentna),

Przykład.

Macierz $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ma równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

i wartości własne: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-5}{12}$.

L.Kowalski, 22.03.2010