

Macierze, układy równań liniowych - zadania

Zadanie 1.Wyznacz macierz $C = 2A - B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{odp. } A = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 3 \\ 14 & -2 & 5 & 0 \\ -5 & 11 & -6 & 1 \end{bmatrix},$$

Zadanie 2.

Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

- Wyznacz wszystkie możliwe iloczyny różnych macierzy,
- Wyznacz macierze transponowane tych macierzy,
- Wyznacz macierz $2C - G^2$,
- Wyznacz macierz G^3 .

Wskazówka do a):

możliwe iloczyny to: AF, BA, BD, BI, DC, CE, CG, GC, DE, DG, GE, HJ, IJ, JF.

ZADANIA

Zadanie 3.

Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Odp. $\det A = -4$, $\det B = -27$, $\det C = 5$, $\det D = 0$, $\det E = 0$, $\det F = 4$.

Zadanie 3a.

Dana jest macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

Wyznacz dopełnienia algebraiczne elementów:

a) a_{32} , b) a_{43} , c) a_{24} .

Odp. a) 80, b) -13, c) -21

Zadanie 4.

Wyznacz macierz odwrotną do macierzy:

$$A = [-2], \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Odp. } A^{-1} = [-0,5], \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.

Wyznacz macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Odp. } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Zadanie 6.

Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Odp. $rA = 2$, $rB = 1$, $rC = 3$, $rD = 5$.**Zadanie 6a.**

Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -15 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 17 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & -7 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Odp. $rA = 2$, $rB = 3$, $rC = 3$.

Zadanie 7.

Wyznacz macierz X jeśli

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odp. a) } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ b) } X \cdot = \begin{bmatrix} 1,5 & 3 & -9 \end{bmatrix},$$

Zadanie 8.

Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8 \\ 13x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

a) ukł. oznaczony, $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3,$ b) ukł. oznaczony, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,$ c) ukł. nieoznaczony, np. x_3 - parametr,

d) ukł. sprzeczny,

e) ukł. nieoznaczony, np. x_4 - parametr .

Przykład.

Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} (-2), (-2), (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (1) \Rightarrow$$

$$(1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (-7/5), (-7/5) \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (2) \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 10 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 10 & \frac{14}{5} \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \end{matrix} \quad (3) \Rightarrow$$

$$(3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 10 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Układ nieoznaczony.

 x_4 - parametr.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 - 3x_4, \\ 5x_2 - 3x_3 = -2 + 10x_4, \\ -\frac{4}{5}x_3 = \frac{14}{5} - 10x_4. \end{cases}$$

$$x_3 = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2}x_4, \quad x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{19}{2}x_4, \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4.$$

Zadanie 9.

Rozwiąż układ równań metodą Cramera:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -3x_1 - x_2 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases} \end{array}$$

- a) ukł. oznaczony, $x_1 = 2, x_2 = 1$,
 b) ukł. oznaczony, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$,
 c) ukł. oznaczony, $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -2$,

Zadanie 10.

Rozwiąż układ równań metodą Gaussa:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 8 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \\ \\ \text{c) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases} \end{array}$$

- a) ukł. sprzeczny,
 b) ukł. oznaczony, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$,
 c) ukł. nieoznaczony, np. x_4 - parametr,
 d) ukł. nieoznaczony, np. x_3, x_4 - parametry .

ZADANIA

Zadanie 11.

Rozwiąż układ równań metodą macierzy odwrotnej.:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -3x_1 - x_2 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$$

a) ukł. oznaczony, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,

b) ukł. oznaczony, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$,

c) ukł. oznaczony, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$,

L.Kowalski 15.10.2018