

Zadanie 1

a) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacz macierz $A^T + 2B - C^T$.

b) Wyznacz macierz X wiedząc, że $(3X)^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

$$(\text{odp. a) } \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -4 \\ 0 & -6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ b) } X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix})$$

Zadanie 2

Zapisz w prostszej postaci:

$$\begin{aligned} &(AB^T)^T \\ &A^T + (A + B^T)^T, \\ &(A^T(B + C^T))^T, \\ &((AB)^T + C)^T, \\ &((A + A^T)(A - A^T))^T \end{aligned}$$

Zadanie 3

a) Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ wyznacz iloczyny $A \cdot B$ i $B \cdot A$,

b) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, wyznacz $A \cdot B$, $B \cdot A$, $(A \cdot B)^T$ i $B^T \cdot A^T$

c) Wyznacz macierz X jeśli $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T - 3X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$(\text{odp. a) } A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}; (A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix})$$

Zauważ, że mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Zauważ, że spełniona jest własność $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Zadanie 4

Sprawdzić, że następujące zbiory macierzy

a) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b > 0, a, b \in R \right\},$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in R \right\}$

z działaniem mnożenia macierzy są grupami abelowymi.

Zadanie 5

Uzasadnić, że dla macierzy kwadratowych zachodzi własność

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Zadanie 6

Oblicz AB i BA jeśli $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

c) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

(odp. a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3a & -2 \\ 4 & 5a & 2 \\ -6 & 7a & 8 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4a & 5a & 2a \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$

b) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3b-2 \\ 4 & 5 & 5b+2 \\ -6 & 7 & 7b+8 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4-6b & 5+7b & 2+8b \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$

c) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})$

Zadanie 7

a) Sprawdź, że wynikiem mnożenia AB, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jest macierz równa trzeciej kolumnie macierzy A.

Jaka powinna być macierz B, aby w ten sposób otrzymać drugą kolumnę macierzy A?

b) Sprawdź, że wynikiem mnożenia BA, gdzie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

jest macierz równa pierwszemu wierszowi macierzy A.

Jaka powinna być macierz B, aby w ten sposób otrzymać czwarty wiersz macierzy A?

$$(\text{odp. a) } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})$$

Zadanie 8

a) Sprawdź, że wynikiem mnożenia BA, gdzie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

jest macierz otrzymana z macierzy A przez przestawienie drugiego i czwartego wiersza.

Zauważ, że macierz B jest macierzą permutacji.

Jaka powinna być macierz B, aby w ten sposób otrzymać przestawienie pierwszego i drugiego wiersza macierzy A?

b) Sprawdź, że wynikiem mnożenia BA, gdzie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

jest macierz otrzymana z macierzy A przez pomnożenie jej trzeciego wiersza przez liczbę c.

Jaka powinna być macierz B, aby w ten sposób otrzymać pomnożenie czwartego wiersza macierzy A przez 5?

c) Sprawdź, że wynikiem mnożenia BA, gdzie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

jest macierz otrzymana z macierzy A przez dodanie do jej trzeciego wiersza, pierwszego wiersza pomnożonego przez liczbę c.

Jaka powinna być macierz B, aby w ten sposób otrzymać dodanie do czwartego wiersza, drugiego wiersza pomnożonego przez 7?

Zauważ, że iloczyny a), b), c) odpowiadają elementarnym operacjom na wierszach macierzy A.

$$\begin{aligned} \text{(odp. a) } B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{b) } B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \\ \text{c) } B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 9

Oblicz,

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^n$$

$$\begin{aligned} \text{(odp. a) } 0, \text{ b) } & \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \\ \text{c) } & \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 10

Oblicz $f(A) = x^2 - 2x + 5$ jeśli $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Zadanie 11

Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(odp. $\det A = 7$, $\det B = 0$, $\det C = -2$, $\det D = -6$)

Zadanie 12

Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

(odp. $\det A = -4$, $\det B = -99$)

Zadanie 13

Sprawdź, że $\det(4(BA)^{-1}B^T A^T) = 4^n$, dla dowolnych nieosobliwych macierzy stopnia n .

Zadanie 14

Rozwiąż równanie:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+12 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(odp. $-10, 2$)

Zadanie 15

Wyznacz (jeżeli istnieje) macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; & \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; & \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

$$(\text{odp. a) } \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -1,5 \\ -0,125 & 0,125 & 0,375 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \text{ c) } \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & -0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{d)} & \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}, \\ \text{e)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 16

Wyznacz (stosując jedną i drugą metodę) macierz odwrotną do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(\text{odp. } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & -2 \\ 0,5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, I^{-1} = I)$$

Zadanie 17

Wyznacz macierz X jeśli

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{g)} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{h)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{i)} X \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{j)} X \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{k)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$1) \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \right)^T = 2 \left(I_2 - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) + 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$(\text{odp. a}) X = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ -2,5 \end{bmatrix}, \text{ b) } X \cdot = [-0,5 \quad -1 \quad 3],$$

$$\text{c) } X = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -1 & -4,5 \\ 1 & 6,5 \end{bmatrix} \quad \text{d) } X \cdot = \begin{bmatrix} -0,5 & 2 & -5 \\ -0,5 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{e) } X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}, \text{ f) } X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ g) } X = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}, \text{ l) } X = \begin{bmatrix} 18 & -10 \\ -30 & 18 \end{bmatrix})$$

Zadanie 18

Znaleźć rząd macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{h) } [2 \quad 7]; \quad \text{i) } [0 \quad 0]; \quad \text{j) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(odp. a) 3, b) 3, c) 2, d) 2, e) 2, f) 3, g) 2, h) 1, i) 0, j) 4)

Zadanie 19

Znaleźć rząd macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(odp. a) 2, b) 3, c) 2)

Zadanie 20

Wyznacz rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}$ w zależności od parametru c .

(odp. $\text{r}A = 1$, gdy $c = 1$ lub $c = -1$, $\text{r}A = 2$, dla pozostałych c)

Zadanie 21

Znaleźć macierz permutacji

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(odp. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Zadanie 22

Sprawdź przez indukcję, że

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \cdot a_{n-1,2} \cdot \dots \cdot a_{1n}$$

Zadanie 23

Ile powinien wynosić wyznacznik macierzy A spełniającej równanie $A^2 - A^T = 0$.

(odp. 0 lub 1)

Zadanie 24

Oblicz

a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(odp. a) 1, b) 5!)

Zadanie 25

Dla macierzy: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

sprawdź, że $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$, chociaż $AB \neq BA$

Zadanie 26

Oblicz $A^T A$ i AA^T gdy

a) $A = [1 \ 2 \ 3]^T$, b) $A = [1 \ -2 \ 3 \ -4]$,

Zadanie 27

Oblicz $X^T A X$ gdy

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $X = [x, y]^T$,