

Cd. zadań:

Zadanie 28

Rozwiąż układ równań metodą macierzy odwrotnej:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases},$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ -x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(odp. a) (3,1), b) (2,3), c) (1, 0, -1), d) (1, 2, 3), e) (1, 0, 0, 1), f) (1, 2, 3, 4))

Zadanie 29

Rozwiąż układy równań z zadania 28 metodą Cramera.

Zadanie 30

Rozwiąż układy równań metodą Cramera i metodą macierzy odwrotnej:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_4 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_3 = 4 \end{cases}$$

(odp. a) (1, 0, 0, 0), b) (1, 0, 1, 0))

Zadanie 31

Sprawdź, że następujące układy równań są sprzeczne:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 32

Wyznaczyć wartości własne i przykładowe wektory własne macierzy

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ c) } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \text{ d) } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \text{ e) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},$$

(odp. a) wartości własne $\pm\sqrt{2}$, wektory własne np. $(1, \pm\sqrt{2})$, b) wartości własne ± 1 , wektory własne np. $(1, \pm 1)$, c) brak rzeczywistych, d) wartość własna -1 (podwójna), wektory własne np. $(1, 1)$)

Zadanie 33

Wyznaczyć wartości własne i przykładowe wektory własne macierzy

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

(odp. a) wartości własne 1, 2, -1, wektory własne np. $(-1, 0, 1)$, $(2, 1, -2)$, $(0, 0, 1)$)

Zadanie 34

Wyznaczyć wartości własne i przykładowe wektory własne macierzy

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

(odp. a) wartości własne 2, 0 (podwójne), wektory własne np. $(0, 0, 0, 1)$, dla 2 i $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$
dla 0, b) wartość własna 2, (czterokrotna), wektory własne np. $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$)

Zadanie 35

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Są macierzami stochastycznymi. Sprawdź, że:

$$\text{a) ich średnia } \begin{bmatrix} 5/12 & 1/6 & 5/12 \\ 0,25 & 0,75 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \text{jest macierzą stochastyczną}$$

$$\text{b) ich iloczyn } \begin{bmatrix} 5/12 & 1/6 & 5/12 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \quad \text{jest macierzą stochastyczną}$$

Zadanie 36

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Zadanie 37

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Zadanie 38

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} P^k$?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$?

Zadanie 39

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} P^k$?

Czy istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k$?

Zadanie 40

Wyznacz wartości własne i ich krotności dla macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Do jakiej klasy należy ta macierz?

Zadanie 41 komputer

Gracze A i B rozpoczynają grę z kapitałem 4zł każdy. W każdej partii gracz A wygrywa z prawdopodobieństwem 0,6, gracz B wygrywa z prawdopodobieństwem 0,4. Po każdej partii przegrywający płaci wygrywającemu 1 zł.

- a) jakie jest prawdopodobieństwo, że gra zakończy się po 4 partiach ?
- b) jakie jest prawdopodobieństwo, że po 6 partiach kapitał każdego gracza wyniesie 4 zł?
- c) Ile wynosi wartość oczekiwana kapitału gracza A po 4 partiach?
- d) Ile wynosi wartość oczekiwana kapitału gracza A po 6 partiach?
- e) Jaki jest rozkład graniczny tego procesu?
- f) Ile wynosi graniczna wartość oczekiwana kapitału gracza A?

Przyjmijmy, że stany procesu to kapitał w posiadaniu gracza A czyli $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Zadanie 42 komputer

Cztery moduły systemu pomiarowego mogą podczas pracy zawieszać się. Ich stan jest sprawdzany co godzinę. Rozpatrzmy proces, którego stany, to liczba niezawieszonych modułów. Jeden zawieszony moduł może być resetowany w przerwie między sprawdzeniami. Rozpatrzmy łańcuch Markowa modelujący ten system. Niech jego macierz P ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,05 & 0,1 & 0,25 & 0,5 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,25 & 0,35 & 0,25 \end{bmatrix}$$

System rozpoczyna pracę gdy wszystkie moduły są sprawne.

- a) jakie jest prawdopodobieństwo, że po 4 godzinach wszystkie moduły będą sprawne?
- b) jakie jest prawdopodobieństwo, że po 2 godzinach dwa moduły będą sprawne?
- c) Ile wynosi wartość oczekiwana liczby dobrych modułów po 4 godzinach?
- d) Jaki jest rozkład graniczny tego procesu?
- e) Ile wynosi graniczna wartość oczekiwana liczby dobrych modułów