

## RODZAJE ŚREDNICH

Jedną z wielkości charakteryzujących dane liczbowe jest wartość średnia.

Rodzaje średnich:

- Arytmetyczna
- Geometryczna
- Harmoniczna
- Potęgowa

Wybór średniej zależy od rodzaju badanych wielkości i potrzeb analizy danych.

Najczęściej stosowaną średnią jest średnia arytmetyczna.

**Średnią arytmetyczną** liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  nazywamy liczbę:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### Przykład.

Pięciu studentów otrzymało na egzaminie z matematyki oceny: 3, 2, 5, 2, 3. Ile wynosi średnia ocena tych studentów?

(odp. 3)

Jeżeli wśród  $n$  danych występują wartości powtarzające się:

$$x_i \text{ występuje } n_i \text{ razy, } i = 1, 2, \dots, r \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = n$$

to

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i$$

Ten sposób liczenia średniej arytmetycznej nazywamy **średnią arytmetyczną ważoną**.

### Przykład.

Dwudziestu pięciu studentów otrzymało na egzaminie z matematyki oceny:

dziesięć ocen 3,

dziesięć ocen 2,

pięć ocen 5.

Ile wynosi średnia ocena tych studentów?

$$\bar{x} = \frac{1}{25} (10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 5) = \frac{75}{25} = 3$$

**Średnią geometryczną** liczb rzeczywistych dodatnich  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  nazywamy pierwiastek  $n$ -tego stopnia z ich iloczynu, tzn.

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Średnia geometryczna znajduje najczęściej zastosowanie przeciętnego tempa zmian w czasie, np. do uśredniania indeksów łańcuchowych.

**Przykład.**

Roczny procentowy przyrost liczby studentów w czterech kolejnych latach wynosił: 10%, 20%, 5%, 15%. Jaki był średni przyrost w tym okresie?

$$\bar{x}_g = \sqrt[4]{1,1 \cdot 1,2 \cdot 1,05 \cdot 1,15} = \sqrt[4]{1,5939} \approx 1,1236$$

Średni procentowy przyrost liczby studentów w tym okresie wynosił około 12,36% z roku na rok.

Zauważmy, że średnia arytmetyczna tych danych wynosi 12,5%

Jeżeli wśród  $n$  danych występują wartości powtarzające się:

$$x_i \text{ występuje } n_i \text{ razy, } i = 1, 2, \dots, r \qquad n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = n$$

to

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{(x_1)^{n_1} \cdot (x_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x_k)^{n_k}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^k (x_i)^{n_i}}$$

Ten sposób liczenia średniej geometrycznej nazywamy **średnią geometryczną ważoną**.

**Średnią harmoniczną** liczb  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  różnych od zera nazywamy odwrotność średniej arytmetycznej odwrotności liczb, tzn.

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Średnią harmoniczną stosuje się przy uśrednianiu wielkości względnych, np. przy obliczaniu przeciętnej prędkości lub średniej gęstości zaludnienia.

**Przykład.**

Pan Kowalski codziennie dojeżdża do pracy samochodem z prędkością 40km/h. Pewnego dnia zasnął i wyjechał później niż zwykle. W połowie trasy zorientował się, że nie zdąży i zwiększył prędkość o 20km/h, dzięki czemu nie spóźnił się do pracy. Z jaką średnią prędkością jechał tego dnia pan Kowalski?

$$\bar{x}_h = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{240}{5} = 48$$

Zauważmy, że średnia arytmetyczna tych danych wynosi 50km/h

Jeżeli wśród  $n$  danych występują wartości powtarzające się:

$$x_i \text{ występuje } n_i \text{ razy, } i = 1, 2, \dots, r \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = n$$

to

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_k}{x_k}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i}}$$

Ten sposób liczenia średniej harmoniczej nazywamy **średnią harmoniczną ważoną**.

**Średnią potęgową rzędu  $k$**  liczb rzeczywistych dodatnich  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  nazywamy liczbę.

$$\bar{x}_{p(k)} = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}} = \sqrt[k]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k}$$

**Uwaga:**

Dla  $k = 1$  jest to średnia arytmetyczna,

Dla  $k = -1$  jest to średnia harmoniczna,

Dla  $k = 2$  jest to **średnia kwadratowa**,

**Przykład.**

Mamy 3 pojemniki sześciennie o krawędziach odpowiednio 1, 2 i 3. Chcemy znaleźć taką krawędź sześciennego pojemnika, aby trzy pojemniki o tej krawędzi zastąpiły dotychczas używane, to znaczy, aby łączna objętość poprzednich i nowych była taka sama.

$$\bar{x}_{p(3)} = \sqrt[3]{\frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{3}} = \sqrt[3]{12} \approx 2,29$$

Zauważmy, że średnia arytmetyczna tych danych wynosi 2.

**Twierdzenie**

Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  zachodzą nierówności

$$\bar{x}_h \leq \bar{x}_g \leq \bar{x}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

L.Kowalski 13.10.2009