

Uzupełnienia do rozdz. I

Przykład

Zbiór izometrii przekształcających dany prostokąt ABCD, który nie jest kwadratem na siebie z działaniem składania przekształceń jest grupą abelową. Zbiór rozpatrywanych izometrii składa się z 4 elementów: O_0 , O_1 to obroty o kąty 0 , π odpowiednio oraz S_a , S_b to symetrie względem symetralnych poszczególnych par boków. Złożenie izometrii jest izometrią, składanie przekształceń jest też łączne.

Działanie w tej grupie można opisać tabelką

	O_0	O_1	S_a	S_b
O_0	O_0	O_1	S_a	S_b
O_1	O_1	O_0	S_b	S_a
S_a	S_a	S_b	O_0	O_1
S_b	S_b	S_a	O_1	O_0

Przyjmujemy pierwsze argumenty

Elementem neutralnym jest O_0 . Elementem przeciwnym do dowolnego elementu jest ten sam element. Jest to grupa abelowa bo powyższa tabelka jest symetryczna.

Przykład

Zbiór $\{0, 2\}$ jest podgrupą grupy Z_4 , bo elementem odwrotnym do liczby 2 jest ta sama liczba $((2 + 2) \bmod 4 = 0)$.

Uwaga.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Lagrange'a nie jest prawdziwe (istnieją grupy dla których nie istnieje podgrupa rzędu k , chociaż k jest dzielnikiem rzędu takiej grupy).

Sposób składania permutacji.

Przykład

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pod pierwszą (tzn. wykonywanej jako pierwsza) permutacją umieszczamy dolny wiersz drugiej permutacji.

$$\text{Wtedy, } p_2 p_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Górny wiersz strzałek jest graficznym obrazem pierwszej permutacji. Strzałki w drugim wierszu prowadzą od kolejnych wartości pierwszej permutacji do elementów w najniższym wierszu znajdujących się na pozycji wskazanej przez liczbę na początku strzałki. Następnie rozpatrujemy złożenie strzałek.

Sposób odwracania permutacji.

Przykład

Aby wyznaczyć element odwrotny do permutacji

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ zapisujemy jej wiersze w odwrotnej kolejności

i porządkujemy kolumny wg pierwszego wiersza, zatem

$$p^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzenie:

$$p^{-1} p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$$

$$pp^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$$

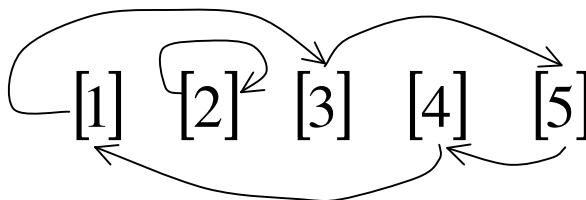
Uwaga.

Aby odwrócić cykl wystarczy zapisać go w odwrotnej kolejności.

Graficzny obraz permutacji.

Każdej permutacji można jednoznacznie przyporządkować graf, np.

permutacji $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ odpowiada graf.



Sposób rozkładania permutacji na cykle rozłączne.

Przykład

Aby rozłożyć permutację $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ na rozłączne

cykle, bierzemy jako początek pierwszego cyklu najmniejszą liczbę, która nie przechodzi na siebie, następny element cyklu to liczba na którą przechodzi ta liczba, itd. aż wrócimy do początkowej liczby w cyklu. Kolejne cykle wyznaczamy podobnie, aż uwzględnimy wszystkie liczby, które nie przechodzą na siebie. Zatem:

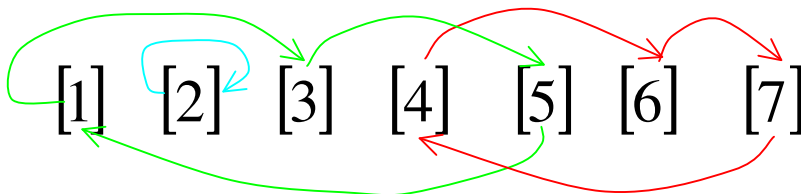
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ 3 \ 5)(4 \ 6 \ 7) = (4 \ 6 \ 7)(1 \ 3 \ 5)$$

Ponieważ składanie cykli rozłącznych jest przemienne obydwie rozkłady na cykle są sobie równe.

Liczba 2 nie występuje w tych cyklach bo permutacja ją zachowuje.

Rozkład na powyższe cykle dobrze widać na grafie tej permutacji



Sposób potęgowania cykli.

Przykład

Niech dany będzie cykl długości k : $p = (n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Wtedy p^2 jest równe pp czyli

$$p^2 = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_k \\ n_2 & n_3 & \cdots & n_1 \\ n_2 & n_3 & \cdots & n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_{k-1} & n_k \\ n_3 & n_4 & \cdots & n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

(dolny wiersz przesuwamy się w lewo o jedną pozycję a pierwsza liczba przechodzi na ostatnie miejsce).

Kolejne potęgi otrzymujemy dokonując kolejnych przesunięć dolnego wiersza.

Wniosek: $p^k = e$.

Uwaga.

Potęga cyklu nie musi być cyklem. Np. dla

$$p = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \text{ mamy}$$

$$p^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3)(2 \ 4)$$

$$p^3 = pp^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p^4 = pp^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$$

Sposób rozkładania permutacji na transpozycje.

Przykład

Aby rozłożyć permutację na transpozycje, rozkładamy ją na cykle rozłączne, a każdy cykl rozkładamy na transpozycje wg schematu

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_k) = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_k)(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_{k-1}) \dots (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3)(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$$

lub

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_k) = (\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)(\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2)(\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_3) \dots (\mathbf{n}_{k-1}, \mathbf{n}_{k-2})(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k-1})$$

Z obu schematów wynika, że cykl długości parzystej rozkłada się na nieparzystą liczbę transpozycji a cykl długości nieparzystej rozkłada się na parzystą liczbę transpozycji. Zatem np.

$$\begin{aligned} p &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 5)(4 \ 6 \ 7) = \\ &= (1 \ 5)(1 \ 3)(4 \ 7)(4 \ 6) \stackrel{\text{lub}}{=} (3 \ 1)(5 \ 3)(6 \ 4)(7 \ 6) \end{aligned}$$

Sprawdzenie.

Pierwszy rozkład.

$$\begin{aligned}
 & (1\ 5)(1\ 3)(4\ 7)(4\ 6) = \\
 & = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{array} \right) = \\
 & = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{array} \right) = p
 \end{aligned}$$

Drugi rozkład.

$$\begin{aligned}
 & (3\ 1)(5\ 3)(6\ 4)(7\ 6) = \\
 & = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right) = \\
 & = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{array} \right) = p
 \end{aligned}$$

Rozkład tej permutacji na parzystą liczbę transpozycji świadczy o tym, że jest to permutacja parzysta.

Sposób wypisywania inwersji danej permutacji.

Przykład

Aby wypisać inwersje permutacji

$$p = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{array} \right)$$

bierzemy pierwszą liczbę z dolnego wiersza tzn. 3 i tworzymy pary z liczbami **mniejszymi** znajdującymi się na prawo od niej, czyli (3, 2); (3, 1). Następnie bierzemy kolejną liczbę z dolnego wiersza tzn. 2 i jak poprzednio wypisujemy inwersję (2, 1).

Kolejne liczby dają inwersje:

Dla liczby 5 mamy (5, 1), (5, 4). Dla liczby 6 mamy (6, 1), (6, 4).

Dla liczby 1 brak inwersji. Dla liczby 7 mamy (7, 4).

Dla liczby 4 brak inwersji.

Razem powyższa permutacja ma osiem inwersji, jest więc permutacją parzystą.

Przykład

Pierścień Z_5

Działanie addytywne

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	0	4
2	2	3	0	4	1
3	3	0	4	1	2
4	4	0	1	2	3

Działanie multiplikatywne

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Zauważmy, że jest to pierścień przemienny z jedynką. W pierścieniu tym każdy element jest odwracalny. Brak dzielników zera. Pierścień Z_5 jest ciałem.

Przykład

Pierścień Z_6

Działanie addytywne

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Działanie multiplikatywne

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Zauważmy, że jest to pierścień przemienny z jedynką. W pierścieniu tym nie każdy element jest odwracalny. Dzielniki zera to 2, 3 i 4. Pierścień Z_6 nie jest ciałem.